SESSION 2014

SECOND CONCOURS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PHYSIQUE - MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche, à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé. Une seule calculatrice à la fois est admise sur la table. Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Si vous repérez une erreur dans l'énoncé, le signaler dans votre copie.

PHYSIQUE ET TOURISME

Les exercices sont totalement indépendants.

Exercice 1 : La fontaine de la place Saint-Michel (Paris)

Un carabin, au premier plan, cherche à comprendre la forme du jet d'eau sortant de la bouche du dragon de la place Saint-Michel à Paris.

Figure 1 : Fontaine Saint-Michel (Paris).

Pour modéliser cette fontaine, il se dit qu'une réserve de hauteur H doit être cachée derrière Saint-Michel et qu'il peut représenter le système de la fontaine par un simple récipient percé, comme sur la figure ci-dessous.

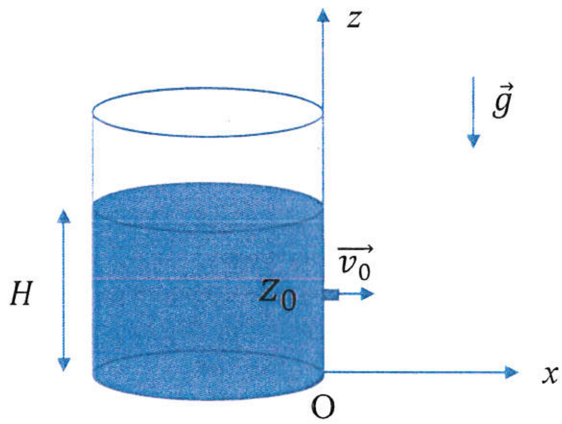


Figure 2 : Schéma de la fontaine.

Ce récipient cylindrique de section S et d'axe vertical est rempli d'eau, jusqu'à une hauteur H. Il est percé d'un trou latéral de section s, à une hauteur $z_0 < H$ comptée à partir du fond. L'axe (Oz) est orienté vers le haut. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, on suppose $s \ll S$.

1. On cherche à calculer la vitesse de sortie $\overrightarrow{v_0}$ du fluide à la hauteur en fonction de g, H et z_0. Trouver par analyse dimensionnelle les exposants α et β tels qu'on puisse écrire :
$$v_0 = Ag^{\alpha}(H - z_0)^{\beta}$$

Où A est une constante sans dimensions que l'on prendra égale à 1 par la suite.

On cherche ensuite à calculer la forme du jet d'eau qui se forme après la sortie du récipient ainsi que l'endroit où le jet d'eau touche le plan $z = 0$ sur lequel le récipient est posé. Pour cela on étudie le mouvement d'une particule fluide, qui sort du récipient par le trou latéral à l'instant $t = 0$. On suppose que la vitesse $\vec{v_0}$ de la particule fluide juste à la sortie est horizontale, selon l'axe (Ox) et a pour norme la valeur calculée à la première question, et on admet que son accélération une fois sortie du récipient vaut $\vec{g}$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique sur la particule fluide qui sort de la fontaine et qui se comporte comme un objet de masse m.
2. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ de la particule fluide.
3. Donner l'équation de sa trajectoire $z(x)$. Quelle est la nature de cette trajectoire ?
4. Calculer l'abscisse x_F du point où le jet d'eau touche le plan $z = 0$, en fonction de z_0 g, v_0 puis en fonction de z_0 et H.
5. Tracer x_F en fonction de z_0. Pour quelle valeur de z_0 la portée du jet est-elle la plus grande ?

Exercice 2 : Un escargot sur Big Ben (Londres)

Figure 3 : Aiguille de Big Ben

Un escargot se déplace sur la grande aiguille d'une des horloges de Big Ben. Il se déplace selon l'axe de l'aiguille à vitesse constante $V = 5$ cm/mn par rapport à l'aiguille. La longueur de l'aiguille vaut 3,5 m. Il part du centre de l'horloge au moment où la grande aiguille passe par midi. On choisit ce moment comme instant initial $t = 0$.

1. Rappeler la définition d'un référentiel. Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen.
2. Dessiner l'allure de la trajectoire de l'escargot dans un référentiel lié à l'aiguille, puis dans un référentiel lié au sol (ou au cadran de l'horloge).
3. On prend comme origine du repère le centre de l'horloge. Donner les expressions littérales des composantes de la vitesse et de l'accélération de l'escargot par rapport au sol, dans la base locale $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ associée aux coordonnées polaires.
4. Dessiner les accélérations radiale, orthoradiale, tangentielle et normale à l'instant $t = 40$ mn. On donnera les valeurs numériques des accélérations radiale et orthoradiale.

Exercice 3 : Danger sur la plage

Un maître-nageur est situé en $A(x_A, y_A)$ sur la plage, alors qu'un vacancier situé en $B(x_B, y_B)$ est sur le point de se noyer. Le maître-nageur peut courir avec la vitesse v_1 et nager avec la vitesse v_2. Il se déplace en ligne droite sur la plage comme dans l'eau. Il atteint l'eau au point $I(x_I, 0)$.

1. Quelle est la durée $t(x_A, y_A, x_B, y_B, x_I)$ que le maître-nageur met pour atteindre le noyé ?
2. A quelle condition sur x_I cette durée est-elle extrémale (minimale dans ce cas) ?
3. Montrer que cette condition sur x_I est équivalente à une relation sur l'angle avec lequel il doit arriver sur la plage (mesurée par rapport à la normale à la plage) et l'angle qu'il prend une fois dans l'eau (à nouveau mesuré par rapport à la normale à la plage).

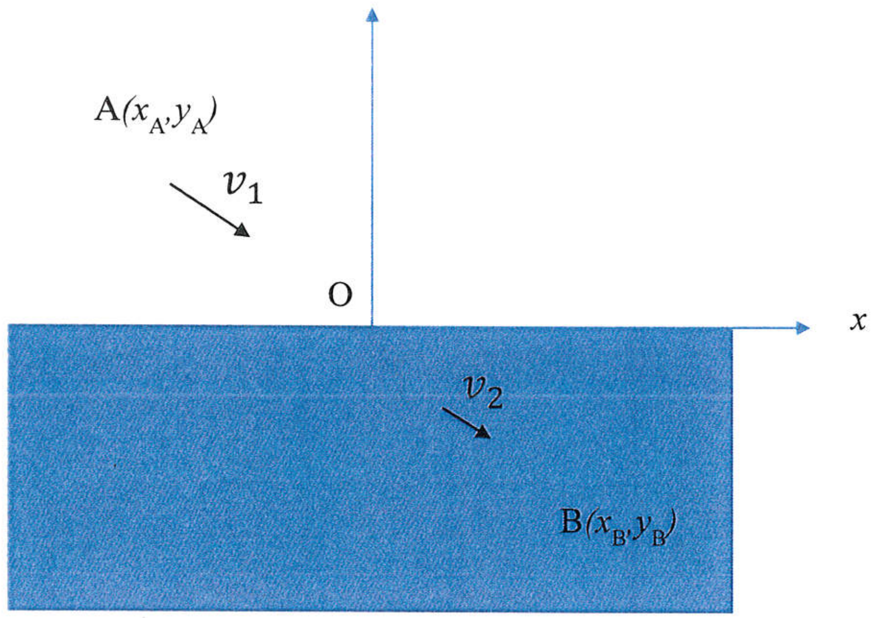


Figure 4 : Sauvetage en mer.

Exercice 4 : Un glaçon pour l'apéritif

Le camping dans lequel vous passez vos vacances est équipé d'un congélateur. On cherche à déterminer la consommation mensuelle, au mois d'août, d'énergie, en supposant que la consommation d'énergie est due uniquement aux pertes thermiques. On suppose de plus que le congélateur n'est pas ouvert et que rien n'est pris ni rajouté à l'intérieur. Il s'agit là d'une consommation minimale.

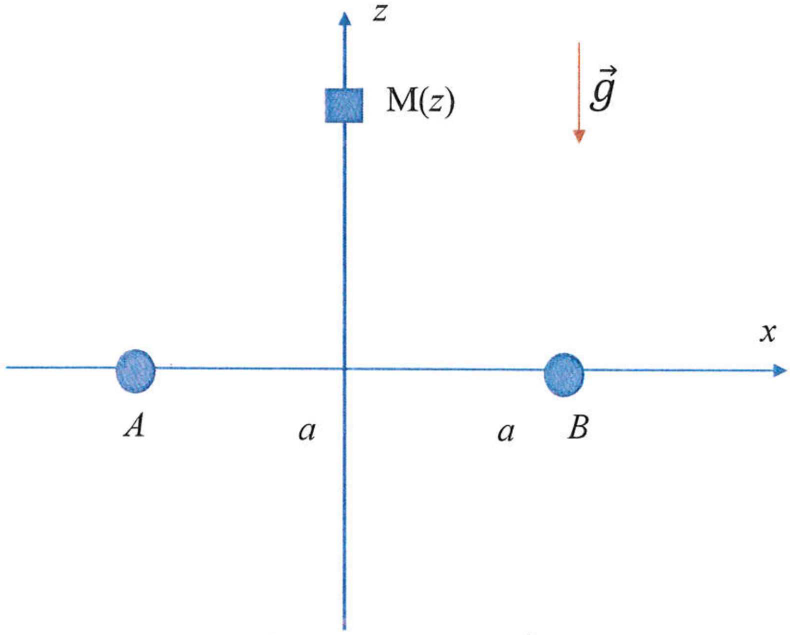
Les parois extérieures du congélateur, dont les dimensions sont 80 cm x 60 cm x 120 cm sur le schéma contiennent des plaques d'épaisseur 9 cm de mousse de polyuréthane et ont une résistance thermique de $R_G = 2{,}8\ \mathrm{m^2.°C.W^{-1}}$. La température à l'intérieur du congélateur est $\theta_{\mathrm{int}} = -18$ °C. La température extérieure est $\theta_{\mathrm{ext}} = +23$ °C.

1. Quelle est le sens du flux d'énergie thermique entre l'intérieur du congélateur et la pièce ?
2. Calculer la valeur du flux d'énergie thermique entre l'intérieur du congélateur et la pièce ?
3. En déduire la valeur de l'énergie thermique qu pénètre au travers de la pièce sur un mois. Exprimer le résultat en kWh.
4. On suppose maintenant qu'on a extrait de ce congélateur un glaçon cubique de côté $a = 2{,}0$ cm. On place ce glaçon dans un verre d'eau de 20,0 cl contenant de l'eau à la température de la pièce. En supposant que le système verre+glaçon est un système isolé thermiquement, calculer la température finale de l'eau dans le verre. On donne les masses volumiques $\rho_{\mathrm{eau}} = 1{,}00\ \mathrm{g.cm^3}$ et $\rho_{\mathrm{glace}} = \text{à}, 90\ \mathrm{g.cm^3}$de l'eau et de la glace ainsi que les capacités calorifiques massiques de l'eau et de la glace $c_{\mathrm{eau}} = 4{,}18\ \mathrm{J.g.K^{-1}}$ et $c_{\mathrm{glace}} = 2{,}10\ \mathrm{J.g.K^{-1}}$ qui supposées constantes.
5. En fait, au cours du week-end, le camping est frappé par une coupure d'électricité. La réserve de glace de 25 kg dans le congélateur est en danger. En supposant que les pertes thermiques sont responsables du réchauffement du réservoir, montrer que la température dans le congélateur vérifie une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constant que l'on écrira (on supposera que la glace se réchauffe mais ne fond pas).
6. Résoudre cette équation différentielle. Tracer l'allure de l'évolution de la température dans le congélateur (pour $t < t_1$). On appelle t_1, le temps au bout duquel la glace atteint 0 °C.

7. Sachant que la chaleur latente de fusion de la glace est de 333 kJ·kg-1, combien de temps faudra-t-il pour que tout la glace soit fondue.
8. Tracer l'allure complète de la courbe d'évolution de la température dans le congélateur.

Exercice 5 : Le canon répulsif

On place dans un chariot obligé de se déplacer sur un rail de direction (Oz) un vacancier. L'ensemble



a une masse m et constitue le système. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. En $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ on place des dispositifs qui repoussent le chariot avec respectivement des forces :

$$\overrightarrow{F_{A/M}} = K\frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|^4}$$

$$\overrightarrow{F_{B/M}} = K\frac{\overrightarrow{BM}}{\|BM\|^4}$$

1. Quelle est la dimension de la constante K.
2. Calculer la force totale exercée sur le chariot en fonction de K, a, m, g, z. En déduire une équation non linéaire dont la racine permettrait de trouver z_{eq} la position d'équilibre du système.
3. On suppose *a priori* que $z_{\text{eq}} \ll a$. Trouver la position d'équilibre du chariot en fonction des mêmes paramètres.
4. En déduire une une condition sur K, a, m et g pour que la condition trouvée à la question précédente soit possible.
5. Exprimer l'énergie potentielle du système $\mathrm{Ep}(K, a, m, g, z)$. Tracer l'allure de $\mathrm{Ep}(z)$.
6. La position d'équilibre trouvée précédemment est-elle une position d'équilibre stable ? instable ? indifférent ?

Exercice 6 : Séance d'observation des papillons

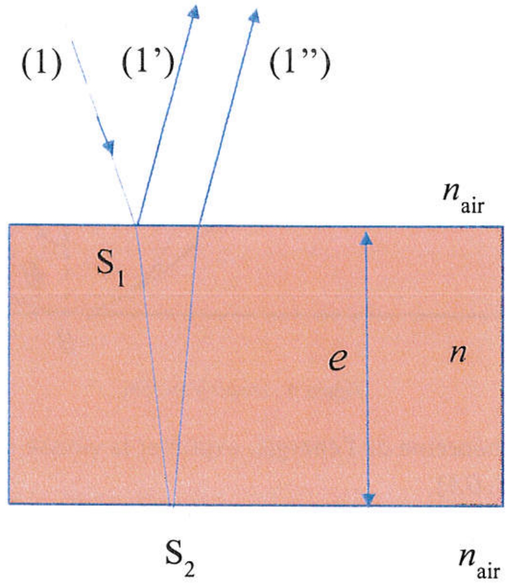


Figure 5 : Schéma de la réflexion sur une aile de papillon.

Les ailes des papillons sont colorées si on les observe sur fond sombre. Ces ailes sont constituées d'une fine membrane de chitine d'indice $n = 1{,}57$ et ont une épaisseur de l'ordre du micromètre. On considère un rayon lumineux de longueur d'onde λ_0 arrivant avec une incidence quasi normale sur la surface de l'aile choisie à un endroit où son épaisseur est e (comme sur la figure (5)).

1. Calculer la différence de marche entre le rayon réfléchir sur la surface externe (1') et le rayon réfléchi sur la surface interne de la membrane (1''). On rappelle qu'une réflexion entre un milieu plus réfringent et un milieu moins réfringent ajoute à la différence de marche géométrique, une demi-longueur d'onde de déphasage.
2. Quelle est la condition pour que les rayons (1') et (1'') interfèrent de façon constructive à l'infini ?
3. En un endroit de l'aile l'épaisseur de la membrane est égale à 0,310 µm. En déduire la longueur d'onde λ_0 de la lumière du spectre visible pour laquelle on obtient des interférences constructives.
4. En reprenant le raisonnement des questions (2) et (3), rechercher la longueur d'onde λ'_0pour laquelle on obtient des interférences destructives dans les mêmes conditions.

Exercice 7 : Course de vélo sur route sinueuse

Dans le référentiel terrestre $R\ (O, x, y, z\ )$ supposé galiléen, un point matériel A (qui symbolise un vélo), de masse m, se déplace sur un rail situé dans un plan vertical (Figure ci-dessous). Le rail comporte une partie circulaire, de diamètre BC $= 2\,l$, que le mobile parcourt à l'intérieur du cercle.

Le point est libéré sans vitesse initiale en H à la hauteur h au-dessus de B, point le plus bas du cercle, et on étudie uniquement le mouvement de A dans la partie circulaire. La liaison est unilatérale et on néglige tous les frottements.

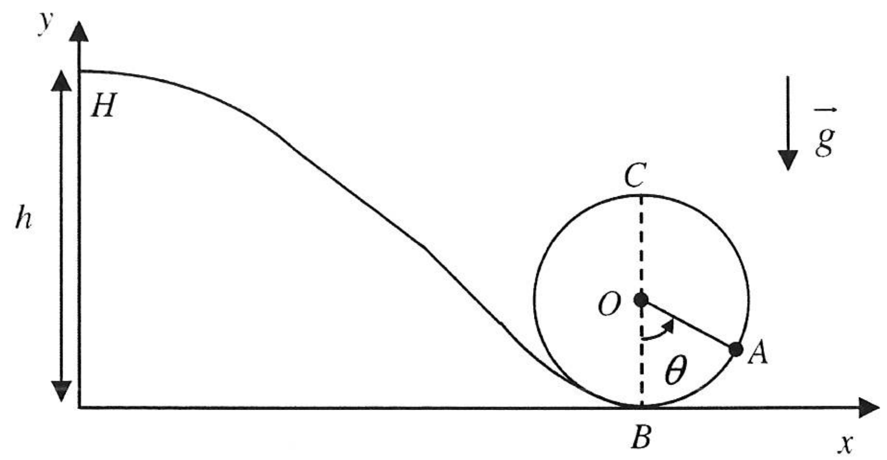


Figure 6 : Looping en vélo.

1. Par application du théorème de l'énergie, exprimer la vitesse $v_{(A/R)}$ de A dans R en fonction de l'angle $\theta = (OB, OA)$.
2. Par application du principe fondamental de la dynamique dans le repère de Frénet, donner l'expression de la réaction R exercée par le guide sur A en fonction de θ.
3. Quelle condition traduit l'existence du contact entre le point matériel et le rail ?
4. De quelle hauteur minimale $h_{\min}$, doit-on lâcher le point pour qu'il fasse le looping sans perdre le contact ?
5. Dans le cas particulier où $h = 3\,l$, $l = 10$ m et $m = 350$ kg, calculer les vitesses de passage en B et C ainsi que les réactions du rail lors du passage en ces points.