Rapport du jury de l'épreuve orale de mathématiques Filière PC Concours 2016

Guillaume Aubrun, Louis Dupaigne, Emmanuel Grenier, Alexis Tchoudjem

1 Commentaires généraux

L'épreuve orale de mathématiques s'est déroulée dans les locaux de l'ENS de Lyon, en parallèle avec les travaux pratiques de chimie. Il s'agit d'une épreuve de 45 minutes, sans préparation.

Notre constat le plus frappant est le suivant: le niveau en probabilités est très hétérogène, avec beaucoup de candidats ayant des lacunes graves sur les concepts les plus élémentaires. Parmi les autres faiblesses criantes parfois rencontrées, mentionnons la forme canonique d'un polynôme du second degré, la distinction entre une quantité finie et une quantité bornée, la résolution de systèmes linéaires simples. On a pu entendre que le maximum d'un produit est égal au produit des maximums. L'inégalité de Cauchy-Schwarz ne semble pas un réflexe pour estimer des quantités de la forme $\sum a_i b_i \ldots$

A l'inverse, nous avons pu apprécier le niveau de maturité des très bons candidats: intuition, recul, autonomie, capacité à formaliser, puissance de calcul, connaissance fine du programme... Le contraste entre deux candidats successifs était souvent très fort, en particulier en probabilités, comme nous l'avons déjà évoqué.

Enfin, aux candidats se situant dans la moyenne, nous conseillons d'interroger davantage les résultats qu'ils utilisent: connaître des contre-exemples, se poser la question de la validité des théorèmes lorsqu'une hypothèse n'est plus vérifiée. Savoir développer son intuition par analyse-synthèse, en se restreignant à des cas particuliers, ou à l'inverse en cherchant à placer un énoncé dans un cadre plus général, sont autant d'atouts pour réussir.

2 Quelques exercices posés

Exercice 1

1. Pour $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbf{P}(|X_\lambda - \lambda| > \varepsilon\lambda) = 0;$$
2. Soient A, B, C trois variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbf{P}(\text{les racines du polynôme } AX^2 + BX + C \text{ sont réelles})$$
3. Même question pour $AX^3 + BX^2 + CX + D$.

Exercice 2

On se donne une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 1}$ Pour $n \geq 1$, soit
$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} v_n^2 \leq 4 \sum_{n\geq 1} u_n^2$$
Cas d'égalité ?
Indication: notons $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Vérifier que
$$v_n^2 + \Delta(nv_n^2) \leq 2u_n v_n.$$
2. On suppose que $\sum u_n^2$ converge. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{1\leq n,m\leq N} \frac{u_n u_m}{n+m} \leq 4 \sum_{n\geq 1} u_n^2$$
3. La constante 4 est-elle optimale dans l'inégalité ci-dessus ?
Indication:
$$\sum_{1\leq n,m\leq N} \frac{u_n u_m}{n+m} = \alpha \cdot \beta$$
où α, β sont les vecteurs de $\mathbb{R}^{N^2}$ de composantes
$$\alpha_{m,n} = \frac{u_m}{(n+m)^{1/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^\lambda, \quad \beta_{m,n} = \frac{u_n}{(n+m)^{1/2}} \left(\frac{n}{m}\right)^\lambda$$
et $\lambda > 0$ à optimiser.

Exercice 3

1. Soit A est une matrice symétrique réelle $n \times n$. On note $\ell_1(A) \geq \cdots \geq \ell_n(A)$ ses valeurs propres. Montrer que

$$\ell_i(A) = \sup_{V \leq \mathbb{R}^n :\, \dim V = i} \; \inf_{v \in V : \|v\| = 1} {}^t v A v$$

2. En déduire que

$$\ell_{i+j-1}(A+B) \leq \ell_i(A) + \ell_j(B) \qquad \text{si } A, B \text{ sont deux matrices symétriques réelles } n \times n.$$