Rapport sur l'oral de Mathématiques

Oral commun Cachan-Lyon-Paris-Rennes

2018

Le jury de cette épreuve était constitué de Adrien Deloro, Bénédicte Haas, Guillaume Poly et Arvind Singh. 444 candidats ont passé l'épreuve.

1 Déroulement des épreuves

Cette partie reprend les grandes lignes du rapport de l'an dernier.

1. Chaque candidat était interrogé au tableau par l'un des examinateurs, sans temps de préparation. La durée officielle d'une interrogation étant de 45 minutes, le tiers-temps ouvrait le droit à un quart d'heure supplémentaire.
2. La question posée et après dix premières minutes sans interagir aucunement, l'examinateur commençait — si nécessaire — à assister le candidat.
3. Cette phase de résolution supervisée occupait la plupart de la planche ; on retiendra déjà qu'une résolution supervisée n'est pas une résolution guidée.
4. En cas d'achèvement, un deuxième exercice a pu être proposé. C'était toujours bon signe. Inversement, l'abandon complet par le jury d'un exercice est resté rarissime et réservé aux très mauvaises performances.
5. Il arrivait aux examinateurs de conclure par une question de cours.

Détaillons les points ci-dessus.

1.1 Formulation de l'exercice

Le jury pouvait avoir deux attitudes : pour un énoncé long, l'avoir préalablement inscrit au tableau ; ou le dicter au candidat. Dans ce second cas l'évaluation commençait dès alors, et pour plusieurs raisons.

— Manifester une certaine indépendance de notations n'est pas une mauvaise chose ; le risque étant néanmoins de renommer à la volée la moitié seulement de l'énoncé.

— Le candidat qui omet de transcrire certaines des hypothèses (malgré la répétition pressante) court toujours le risque de les oublier par la suite. Au demeurant ne pas daigner noter qu'une fonction est continue donne l'impression de tenir pour acquis qu'elles le sont toutes.

— La dextérité dans l'emploi de l'appareil de notations est inégalement partagée. Or la maturité technique est mesurable aussi d'après le recul face au langage mathématique.

1.2 Les dix premières minutes

Le jury s'astreignait à dix minutes de mutisme et même d'impassibilité, n'engageant ni ne laissant s'engager d'emblée le dialogue. Ce premier temps a toujours fourni des indications précieuses non seulement sur l'autonomie du candidat mais aussi sur son pouvoir d'intuition. Et malgré l'apparente hostilité du procédé (déplaisant autant pour l'examinateur que pour le postulant), il n'a pas semblé déstabiliser de candidat.

Il est en effet intéressant de voir comment part le candidat face à un problème qu'on suppose entièrement nouveau pour lui. La résolution directe d'un exercice de type É.N.S. n'est pas nécessaire à l'obtention d'une note correcte ; seule la planche excellente se passe ainsi ; nous y reviendrons. Lors à défaut d'une épiphanie soudaine, on attend du candidat de la méthode, de l'autonomie, et un certain dynamisme.

Méthode. L'assimilation d'un problème se fait souvent par commentaire et simplification, de manière lucide et posée.

Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. À ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé sans se lancer tambour battant dans des calculs ou un raisonnement formaté peut être une bonne option. Un énoncé contenant un entier naturel ne s'établit pas toujours par récurrence ; l'introduction d'une base ne simplifie que rarement un problème d'algèbre linéaire ; on ne dérive pas tête baissée une fonction seulement supposée continue.

Faire des dessins, même dans des cas particuliers, même de façon simpliste, est souvent inspirant. Il est frappant de constater que nombre de candidats sont immédiatement débloqués quand l'examinateur leur suggère de faire un dessin. Ce devrait pourtant être une initiative naturelle.

Le jury voudrait insister sur la vanité d'une foi trop littérale en cette méthodologie de bon sens. Paraphraser l'énoncé, en se contentant de rappeler les définitions ; le simplifier à outrance pour n'aborder qu'un cas manifestement trivial ; esquisser des petits dessins sérigraphiés sans lien avec le problème, sont des « trucs » qui ne feront pas longtemps illusion. Il est aisé de paraître profond et de présenter les caractères extérieurs d'une méthodologie supérieure pendant deux minutes : or dix minutes sont assez pour que tel numéro tourne à vide.

Autonomie. Le jury attend des candidats un certain sens de l'initiative. Rester muet parce qu'on n'a pas la solution totale de l'exercice dénote un certain manque de maturité scientifique. À terme le candidat recevra certainement de l'aide ; il pourra même éventuellement en demander ; en revanche il ne doit pas donner l'impression d'en dépendre entièrement ou pire, de l'exiger. De même proposer de nombreuses pistes différentes afin que le jury en choisisse une, montre un défaut d'autonomie.

Rappelons que le niveau des oraux d'É.N.S. étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience et attend du candidat qu'il lui montre son *aptitude à raisonner*, même si ce raisonnement est incomplet.

Dynamisme. Les examinateurs ont été surpris de l'attitude passive de certains candidats, qui semblent attendre qu'on leur dise quoi faire. Ne montrer aucune motivation dans son attitude fait bien sûr mauvaise impression.

De même l'emploi d'un ton interrogatif dans l'espoir de déceler chez l'examinateur une confirmation ou une infirmation est à proscrire. Il est sanctionné. Le jury attend *des affirmations*, modestes et révocables mais posées ; des affirmations auxquelles le candidat lui-même croit suffisamment pour désirer les établir.

Or le jury a constaté que de nombreux candidats rechignent à écrire leur début de preuve au tableau, préférant discourir et discuter le problème en un assaut d'éloquence parfois intéressant mais souvent inefficace. Pareil excès de rhétorique ne peut que nuire. Il est louable d'expliquer sa stratégie, mais il importe aussi d'écrire progressivement sa solution, de poser nettement les choses, d'établir fermement les étapes du raisonnement : il importe de savoir canaliser son dynamisme, et de le parer de rigueur.

1.3 Corps de la planche

Un mauvais début d'oral ne disqualifie nullement, la prestation étant jugée sur toute la durée de l'épreuve. Le candidat est donc invité à montrer persévérance et adaptabilité, qualités indispensables au métier de chercheur auquel forment les É.N.S.

Tout ce que nous avons dit des dix premières minutes reste vrai du corps de la planche, où le dialogue est engagé. Celui-ci n'est ni la marque d'un échec, ni une planche de salut où l'examinateur « débloque » le problème pour le candidat : *le dialogue est une autre part de l'évaluation*, où l'on mesure également sa réactivité, sa capacité à remettre en doute une stratégie ; et plus généralement, les germes de sa future habileté au débat scientifique. Cela étant mené sans pour autant brader l'exigence de rigueur.

Réactivité. L'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise et à se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.

Idem, admettre au cours d'un long raisonnement que l'on n'a pas tout à fait saisi une étape est un signe d'honnêteté scientifique appréciable et qui profite généralement au candidat pour mener à bien son oral : la découverte en fin de planche d'une incompréhension profonde (soigneusement camouflée) de l'exercice étant l'une des pires situations possibles.

Plusieurs candidats n'ont ostensiblement pas tenu compte des remarques et conseils bienveillants du jury lors de la planche, alors que leur approche du problème semblait vouée à un échec certain. Pareille attitude, outre qu'elle peut agacer l'examinateur, est naturellement préjudiciable au candidat. Les exercices posés sont souvent difficiles ; nul besoin de questions-pièges, et les indications données le sont de bonne foi.

Rigueur. Le dialogue n'est pas une simple discussion qualitative.

Entretenir un certain flou est la meilleure façon de commettre des erreurs et de ne pas convaincre l'examinateur. Au contraire, une argumentation claire, progressive, avec un effort de rédaction est fortement valorisée.

Le jury a d'ailleurs toujours exigé tôt ou tard un moment de technicité pure — les explications moins drapées de la rigueur la plus stricte, n'étant consenties qu'au candidat ayant déjà montré sa valeur technique.

Une éventuelle résolution complète ne joue pour ainsi dire qu'à la marge, et permet de distinguer les bons candidats des très bons, la note de 15 étant parfaitement accessible sur un exercice incomplètement traité. La perception qu'a le candidat de sa prestation est d'ailleurs souvent fausse ; la notation tient naturellement compte de l'inégale difficulté des exercices posés lors de la session d'oraux. Cette dernière remarque doit encore inciter le candidat à rester jusqu'au bout concentré et motivé.

Précisons enfin qu'être nerveux un jour d'oral est bien compréhensible. Un trac visible n'est aucunement pénalisé. Le candidat peut compter sur la bienveillance de l'examinateur. Un excès de confiance, fondée ou pas, n'est d'ailleurs pas blâmé non plus par un jury qui se veut olympien. Certains candidats particulièrement anxieux ont tendance à ne pas parler du tout et se contenter d'écrire. Sans être compté négativement, c'est dommage car ils se ralentissent ainsi considérablement et se privent de l'atout du dialogue.

1.4 Sur le cours

Le jury attend une connaissance et une compréhension impeccable du cours ; ainsi qu'une vision claire des articulations entre ses différentes parties. On attend du recul. *Le candidat qui se contente d'apprendre des théorèmes en vue de les appliquer n'a tout simplement pas le profil cherché.* Ainsi, l'emploi de la notion de continuité réelle pour des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par un candidat dénote un profond manque de recul. Il nous paraît indispensable d'insister sur ce point : le cours doit être su ainsi que les démonstrations des principaux théorèmes du cours.

À l'inverse, la mention de connaissances hors-programme pertinentes a pu être appréciée de l'examinateur, si elle apportait quelque chose à la discussion et qu'elle était faite avec les précautions nécessaires. Mais une vaste érudition, ou même la manifestation d'un intérêt quelconque pour les mathématiques n'est pas exigible. Et d'ailleurs le jury n'était pas prêt à entendre un candidat invoquer un résultat qu'il n'eût su démontrer ; il doit reconnaître que le cas de figure était rare, et qu'une grande culture mathématique dûment maîtrisée semble être l'apanage des meilleurs candidats.

2 Difficultés spécifiques

Le jury a pris connaissance, avec étonnement parfois, des lacunes sur des points de cours aussi variés que fondamentaux chez de nombreux candidats. On insistera particulièrement sur les points suivants.

— Les énoncés des formules de Taylor sont trop souvent approximatifs. De même pour le théorème du prolongement $\mathcal{C}^k$.

— Comme l'an passé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires n'est toujours pas maîtrisée. On attend des candidats une connaissance parfaite de la démonstration ainsi que de son cas d'égalité. C'est d'autant plus dommageable que cette remarque figurait également dans le précédent rapport du jury !

— De même, de nombreuses notions basiques de probabilités semblent poser des problèmes aux candidats. Le fait que la variance d'une somme soit la somme des variances si les variables sont indépendantes ou tout simplement le lien entre la probabilité d'un évènement et l'espérance de son indicatrice ont posé de sérieux problèmes à des candidats.

— Le jury a été surpris de voir méconnaître l'interprétation pourtant fondamentale de l'espérance comme projection sur les constantes, et de la variance comme carré de la distance concernée. Plus que tout autre domaine du programme, les probabilités semblent insuffisamment intériorisées : si les étudiants en ont presque tous des rudiments techniques, cela semble pour eux un langage abstrait sans grande signification intuitive.

— En particulier, de nombreux candidats éprouvent des difficultés à manipuler les variables aléatoires de façon intrinsèque et se sentent obliger d'introduire systématiquement l'ensemble d'arrivée de ces variables, ce faisant alourdissant grandement la rédaction et compliquant la résolution des exercices.
— La recherche d'intervalles stables pour l'étude de certaines suites définies par récurrence a révélé de surprenantes difficultés.
— L'algèbre linéaire porte comme toujours son lot de malentendus. Calculs de déterminants, introductions de bases, devraient être des mesures de dernier recours. L'expression « une base canonique » est du plus mauvais effet. La somme de deux matrices nilpotentes n'est que rarement nilpotente. La liste serait longue.
— Le jury a appris avec soulagement que toute partie compacte de $\mathbb{R}$ est un intervalle.
— La sommabilité des suites de terme général e^{-n^α} a révélé de sérieuses lacunes dans l'emploi des critères de croissance comparée.
— Certains théorèmes d'analyse comme les critères de dérivation sous le signe somme ou la dérivée de la fonction réciproque ont semé la panique chez les candidats les plus faibles.
— Le hors-programme est toujours une chose délicate. L'un de nos exercices introduisait le déterminant des dérivées 0- à $(n-1)$-èmes de n fonctions. Certains candidats ont identifié le lien avec un wronskien en taille n ; il était louable de connaître le mot ; encore eût-il fallu qu'une équation différentielle fût introduite.
— Inversement, certaines notions plus isolées dans le programme sont parfois traitées avec légèreté. À plusieurs reprises le théorème chinois a été fort mal cité.

Enfin le jury a été frappé de la débâcle causée par certains énoncés réputés classiques : il semblerait exigible d'un candidat à une É.N.S. de parfaitement savoir identifier les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même et de reconnaître les avatars de cette description pour d'autres structures (*via* l'application d'un logarithme par exemple). Cette année la caractérisation du centre du groupe linéaire a donné lieu à des difficultés inattendues.

3 Exemples d'exercices et commentaires

L'année dernière une erreur s'était glissée dans l'un de nos énoncés. Si pareille situation est toujours possible, nous en tenons compte dans la notation de sorte qu'un candidat ayant planché sur un énoncé faux n'est jamais désavantagé. Un candidat qui décèle le problème est en revanche récompensé.

Exercice (théorème du complément de Frobenius : preuve de Bender dans le cas pair)**.**

Soit G un groupe fini possédant un sous-groupe $H < G$ avec la propriété :

$$(\forall g \in G) \quad g \notin H \to H \cap gHg^{-1} = \{1\}$$

1. Soit K l'ensemble $\left(G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}\right) \cup \{1\}$. Déterminer le cardinal de K.
2. On suppose que H contient une involution i. Montrer que si $g \in G \setminus H$, on a $1 \neq igig^{-1} \in K$.
3. En déduire que K est un sous-groupe de G.

Commentaire. Virtuose, profond, brillant, voici Helmut Bender aux ÉNS ! Oui, un tel exercice peut être posé. Non, le but n'est pas d'en offrir une solution totale. Lors d'une planche, 2. a presque été fini.

Le candidat doit *tenir le choc*, et montrer qu'il sait essayer des pistes. Ajoutons que les hors-programmes « classiques » ne servent absolument à rien sur ce genre de problème. L'oral tente de mesurer la valeur du candidat à travers celle de sa performance, mais pas celle de sa formation.

Solution.

1. Simple comptage, mais nous devons tourner autour de l'indice $[G : H]$ (notion hors programme).
   Considérons l'ensemble $H^* = H \setminus \{1\}$. Si $g \notin H$, alors $H^* \cap gH^*g^{-1} = \emptyset$, donc les ensembles gH^*g^{-1} *distincts* sont *disjoints*. Combien y en a-t-il ? Classons les éléments $g \in G$ par la relation d'équivalence : $x \sim y$ ssi $xH^*x^{-1} = yH^*y^{-1}$. Voir que :
   $$x \sim y \text{ ssi } x^{-1}yHy^{-1}x = H \text{ ssi } (x^{-1}y)H(x^{-1}y)^{-1} = H \text{ ssi } x^{-1}y \in H \text{ ssi } y \in xH$$
   donc toutes les classes sont de même cardinal $|H|$; il y a $\frac{|G|}{|H}$ classes, et autant d'ensembles gH^*g^{-1}. Il suit que :
   $$\left| \bigcup_{g\in G} gH^*g^{-1} \right| = \frac{|G|}{|H|} \cdot (|H| - 1)$$
   et puisque $K = G \setminus \bigcup_{g\in G} gH^*g^{-1}$, on on voit que $|K| = |G| - \frac{|G|}{|H|}|H| + \frac{|G|}{|H|} = \frac{|G|}{|H|}$.
2. Jeu systématique sur la « malnormalité » de H + « le truc dihédral » (deux involutions inversent leur produit).
   Soit $g \notin H$ fixé ; notons $j = gig^{-1}$ et $r = igig^{-1} = ij$. Voir que $iri = gig^{-1}i = (igig^{-1})^{-1} = r^{-1}$, et $jrj = r^{-1}$ de même.
   Vérifions $r \neq 1$; sinon $gig^{-1} = i$, donc $g \in C_G(i)$, et $i \in H \cap gHg^{-1}$, d'où $g \in H$, absurde.
   Vérifions $r \in K$. Sinon il existe $a \in G$ tel que $r \in aHa^{-1} = H'$. Mais $iri = r^{-1} \in H' \cap iH'i$ donc $i \in H'$. Comme $i \in H$, on a en fait $i \in H \cap H'$ d'où $H' = H$.
   De même $j \in H' = H$. Ainsi $j = gig^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$, et donc $g \in H$, contradiction.
3. Soit l'ensemble $R^* = \{igig^{-1} : g \in G \setminus H\} \subseteq K$.
   Comptons R^* (ici encore il faut tourner autour de $[G : C_G(i)]$). Définissons la relation $x \sim y$ ssi $ixix^{-1} = iyiy^{-1}$. Alors :
   $$x \sim y \text{ ssi } xix^{-1} = yiy^{-1} \text{ ssi } (x^{-1}y)i(x^{-1}y)^{-1} = i \text{ ssi } x^{-1}y \in C_G(i) \text{ ssi } y \in xC_G(i)$$
   donc toutes les classes sont de même cardinal $|C_G(i)|$; il y a $\frac{|G|}{|C_G(i)|}$ classes, mais on a ici compté celle de H, qui est exclue dans R^*.
   Ainsi $|R^*| = \frac{|G|}{|C_G(i)|} - 1$. Comme $1 \in K \setminus R^*$, cela fait $|K| \geq \frac{|G|}{|C_G(i)|}$. Or on a montré à la question précédente que $C_G(i) \leq H$; d'où $|K| \geq \frac{|G|}{|H|}$. L'égalité a déjà été démontrée !
   Conclusion : non seulement $H = C_G(i)$ (ce qui n'était pas clair a priori) mais aussi :
   $$K = R^* \cup \{1\} = \{i \cdot gig^{-1} : g \in G\}.$$
   Montrons enfin que K est un sous-groupe. Ici viennent les dernières astuces. L'invariance par inversion est évidente par la définition (l'union $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ est stable par

inversion). Prenons $k_1, k_2 \in K$; on peut les supposer non-triviaux, d'où g_1 et g_2 tels que $k_1 = ig_1ig_1^{-1}$ et $k_2 = ig_2ig_2^{-1}$. Alors :

$$k_2^{-1}k_1 = g_2ig_2^{-1}i \cdot ig_1ig_1^{-1} = g_2ig_2^{-1} \cdot g_1ig_1^{-1} = g_2(ig_2^{-1}g_1ig_1^{-1}g_2)g_2^{-1} \in g_2Kg_2^{-1} = K$$

puisque l'invariance sous conjugaison est elle aussi évidente par la définition. □

Remarque culturelle : ce théorème dû à Frobenius est encore vrai si H est d'ordre impair, mais la théorie des caractères est — à la connaissance actuelle — incontournable. Et à l'infini c'est autrement plus complexe.

Exercice. On distribue r boules dans n urnes de façon uniforme (chaque boule est dans une urne donnée avec probabilité $1/n$, indépendemment). On note N_n le nombre d'urnes vides.

1. On suppose que $n \to \infty$ et $r/n \to c \in [0, \infty[$. Montrer qu'il existe un réel ℓ à déterminer tel que pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \ell\right| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$
2. On suppose à présent que $ne^{-r/n} \to \lambda \in]0, \infty[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N_n = k)$ converge vers un réel à déterminer. Discuter le résultat.

Commentaire. L'idée de départ est d'écrire la variable aléatoire N_n comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli de même loi, $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$ où A_i désigne l'événement "l'urne n°i est vide", $1 \leq i \leq n$. Le point délicat ici est que les événements A_i ne sont pas indépendants. Ceci a échapé à plusieurs candidats, qui ont cru pouvoir montrer la première question directement avec la loi faible des grands nombres. Il suffisait en fait de reprendre les différentes étapes de la preuve de cette loi faible pour conclure (calculs de l'espérance et de la variance de N_n, puis utilisation de l'inégalité de Markov). Certains candidats n'ont pas su montrer que les $A_i, 1 \leq i \leq n$ ne sont pas indépendants et/ou ne connaissaient pas la formule reliant la variance d'une somme à la somme des covariances, ce qui a été lourdement sanctionné.

Pour la question 2, nous avons très vite suggéré aux candidats d'introduire les probabilités $p_m(r, n)$ et d'essayer d'établir des liens entre elles, voir la solution ci-dessous pour la notation. De bons candidats ont su les exploiter pour avancer assez loin dans le problème.

Solution. On numérote les urnes de 1 à n et on note A_i l'événement l'urne n°i est vide. On remarque que $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$, $\mathbb{P}(A_i) = (1 - 1/n)^r$ et donc $\mathbb{E}[N_n] = n(1 - 1/n)^r$.

1. On déduit de cette expression de l'espérance que sous l'hypothèse de l'énoncé
$$\mathbb{E}[N_n/n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-c}.$$
Par ailleurs,
$$\mathrm{Var}(N_n) = \mathbb{E}[N_n^2] - (\mathbb{E}[N_n])^2$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_n^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} + \sum_{1\leq i\neq j\leq n}^n \mathbf{1}_{A_i}\mathbf{1}_{A_j}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} \mathbb{P}(A_i\cap A_j) \\
&= n\mathbb{P}(A_1) + n(n-1)\mathbb{P}(A_1\cap A_2) \\
&= n(1-1/n)^r + n(n-1)(1-2/n)^r.
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$\mathrm{Var}(n^{-1}N_n) = n^{-2}\mathrm{Var}(N_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2c} - (e^{-c})^2 = 0.$$

On pouvait aussi directement calculer la variance de N_n via l'égalité

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{Cov}\left(\mathbf{1}_{A_i}, \mathbf{1}_{A_j}\right).$$

On conclut avec l'inégalité de Markov : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - e^{-c}\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\frac{N_n}{n} - e^{-c}\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{N_n}{n} - e^{-c}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\mathrm{Var}\left(\frac{N_n}{n}\right) + \left(\frac{\mathbb{E}[N_n]}{n} - e^{-c}\right)^2\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

2. Remarquons que l'hypothèse implique $n \ll r \leq \mathrm{cste}\cdot n\ln(n)$.
   Pour tout entier m, notons $p_m(r,n)$ la probabilité qu'exactement m urnes soient vides quand on distribue r boules dans n urnes. La probabilité que m urnes données soient vides est $(1-m/n)^r$. Le choix des emplacements vides donne ensuite

$$p_m(r,n) = \binom{n}{m}(1-m/n)^r p_0(r,n-m).$$

La probabilité $p_0(r,n-m)$ peut se calculer explicitement grâce à la formule du crible [1]. On écrit $p_0(r,n) = 1 - \mathbb{P}(A_1\cup\ldots\cup A_n)$, utilise $\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}) = (1-k/n)^r$, ce qui donne via la formule du crible

$$p_0(r,n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}(1-k/n)^r.$$

1. ou formule de Poincaré ; cette formule, qui n'est pas explicitement au programme, a été donnée aux candidats quand c'était nécessaire et est démontrée à la fin du corrigé.

Reste à déterminer le comportement asymptotique de ces quantités quand $n \to \infty$. Tout d'abord,

$$\binom{n}{m}(1-m/n)^r = \frac{1}{m!}\prod_{j=1}^{m}(n-j+1)\exp(r\ln(1-m/n)).$$

En utilisant le développement limité $\ln(1-m/n) = -m/n - (m/n)^2/2 + o(1/n^2)$, on voit que le terme

$$\prod_{j=1}^{m}(n-j+1)\exp(r\ln(1-m/n))$$

s'écrit

$$(n\exp(-r/n))^m \cdot (1+o(1)) \cdot \exp\left(-r\left((m/n)^2(1+o(1))/2\right)\right),$$

qui converge vers λ^m d'après l'hypothèse de l'énoncé.

De ceci on déduit que :

- $\binom{n}{m}(1-m/n)^r \to \lambda^m/m!$
- $p_0(r,n-m) \to \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k/k! = e^{-\lambda}$; en effet, l'hypothèse de l'énoncé implique l'existence d'un réel C tel que

  $$\binom{n-m}{k}(1-k/(n-m))^r \leq \frac{(n-m)^k}{k!}e^{-rk/(n-m)} \leq \frac{C^k}{k!}$$

  pour tous les entiers $n-m, k$ positifs. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier n_ε tel que $\left|\sum_{k=n_\varepsilon}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}(1-k/n-m)^r\right| \leq \varepsilon$ pour tout $n-m$. On peut alors travailler avec la somme finie $\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}$ et conclure.

Par conséquent

$$\mathbb{P}(N_n = m) = p_m(r,n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

On voit que le terme limite correspond à une loi de Poisson de paramètre λ.

Formule du crible. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B_1, \ldots, B_n$ des événements, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}\mathbb{P}(B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_p}).$$

La démonstration peut se faire par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$ la formule est bien connue

$$\mathbb{P}(B_1\cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1\cap B_2).$$

Puis, en supposant l'égalité vraie jusqu'au rang n, on écrit

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1}B_i) = \mathbb{P}((\cup_{i=1}^n B_i)\cup B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i) - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n(B_i\cap B_{n+1})).$$

On développe $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i)$ et $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n(B_i\cap B_{n+1}))$ avec l'hypothèse de récurrence, ce qui donne l'égalité voulue au rang $n+1$.

□

Exercice. Soit A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $a_1 \geq a_2 \ldots \geq a_n$ les valeurs propres de A rangées par ordre décroissant. De même, soit $b_1 \geq b_2 \ldots \geq b_n$ les valeurs propres de B rangées par ordre décroissant. Démontrer l'inégalité

$$\operatorname{tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Commentaire. Exercice de facture classique, il a été assez bien réussi dans l'ensemble.

Solution. On note D_A la matrice diagonale $(a_1, \ldots, a_n)$. De même pour D_B. Puisque A est symétrique, le théorème spectral affirme qu'il existe une matrice orthogonale O_A telle que $A = {}^tO_A D_A O_A$. De même, il existe O^B orthogonale telle que $B = {}^tO_B D_B O_B$. On pose $O = O_A {}^tO_B$ qui est aussi orthogonale. Alors, on a

$$\operatorname{tr}AB = \operatorname{tr}(({}^tO_A D_A O_A)({}^tO_B D_B O_B)) = \operatorname{tr}(AOB^tO) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j O_{i,j}^2.$$

On pose $m_{i,j} = O_{i,j}^2$. Il reste à montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j m_{i,j} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{1}$$

De plus, on observe qu'il suffit de montrer ce résultat lorsque les suites (a_i) et (b_i) sont *strictement* décroissantes. Le résultat général s'obtient ensuite par densité en utilisant que les fonctions $X \to {}^tO_{A/B} X O_{A/B}$ sont continues, tout comme la trace. Comme O est une matrice orthogonale, $M = (m_{i,j})$ est une matrice bi-stochastique, c'est-à-dire vérifiant

(a) $0 \leq m_{i,j} \leq 1$ pour tout i, j ;

(b) la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1 ;

(c) la somme des coefficients sur chaque colonne est égale à 1.

On va montrer que (1) est vérifié pour toute matrice bi-stochastique. L'application

$$f \; : \; M \to \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j m_{i,j}$$

est continue et l'ensemble des matrices bi-stochastiques est compact (évident d'après le caractérisation (a)-(b)-(c)) donc elle atteint son maximum sur cet ensemble pour une certaine matrice M. On montre que M est l'identité. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. On regarde le plus petit indice i tel que $m_{i,i} < 1$. On peut supposer que $i = 1$ (car sinon, on se ramène au même problème en dimension $n - i + 1$). La somme des coefficients de la première colonne de M vaut 1, comme $m_{1,1} < 1$, il doit exister $j_0 \in \{2, \ldots, n\}$ avec $m_{1,j_0} > 0$. De même, il existe $i_0 \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $m_{i_0,1} > 0$. Fixons $0 < \varepsilon < \min(m_{1,j_0}, mi, 1_0)$. On considère la matrice $\tilde{M}$ définie comme perturbation de M :

$$\tilde{m}_{i,j} = m_{i,j} + \begin{cases} \varepsilon & \text{si } (i,j) = (1,1) \text{ ou si } (i,j) = (i_0, j_0), \\ -\varepsilon & \text{si } (i,j) = (i_0, 1) \text{ ou si } (i,j) = (1, j_0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que $\tilde{M}$ est encore une matrice bi-stochastique (les coefficients restent bien dans $[0,1]$ d'après le choix de ε). De plus

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \tilde{m}_{i,j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j m_{i,j} = \varepsilon a_1 b_1 + \varepsilon a_{i_0} b_{j_0} - \varepsilon a_{i_0} b_1 - \varepsilon a_1 b_{j_0} = \varepsilon (a_1 - a_{i_0})(b_1 - b_{j_0})$$

Cette quantité est strictement positive car on a supposé que les suites (a_i) et (b_i) étaient strictement décroissantes, ce qui contredit la maximalité de M pour f. □

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On fait l'hypothèse suivante

$$(\star)\ \forall (x,y) \in E^2,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|ax + by\| = \|bx + ay\|.$$

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ sur E induisant la norme $\|\cdot\|$.

1. Démontrez que si $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\|$ alors nécessairement $x = y$.
2. En déduire que pour tout $(x,y) \in E^2$ tels que $\|x\|y \neq \|y\|x$:
$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$
3. En déduire que pour tout $(x,y) \in E^2$ formant un système libre et tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, l'équation d'inconnue t
$$\|x + t(y - x)\| = \alpha,$$
admet au plus deux solutions.
4. En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (2)$$
5. Démontrez que toute norme vérifiant la relation (2) est induite par un produit scalaire.

Commentaire. Cet exercice démontre un critère garantissant qu'une norme est issue d'un produit scalaire. Les étudiants ont eu du mal à faire le lien entre les différentes questions qui se suivaient. La plupart des candidats n'ont pu qu'aborder les deux premières questions.

Solution. 1. Par hypothèse on a $\|x + y\| = 2\|x\|$. On choisit $a = 1$ et $b = -2$ et on applique l'hypothèse $(\star)$ avec les vecteurs $x + y$ et $2x$. On obtient alors $\|(x + y) - 2 \cdot (2 \cdot x)\| = \|2(x + y) - 2x\|$ ce qui donne

$$\|(y - x) - 2x\| = 2\|y\| = 2\|x\|.$$

Montrons par récurrence sur n que $\|(2n + 1)(y - x) - 2x\| = 2\|x\|$. L'hypothèse de récurrence a été initialisée ci-dessus pour $n = 0$. Pour l'hérédité on procède de façon similaire en appliquant $(\star)$ pour $a = 2$ et $b = 2n + 3$ et les vecteurs $(2n + 1)(y - x) - 2x$ et $2x$. Cela donne

$$
\begin{aligned}
& \|2\left((2n+1)(y-x)-2x\right)+(2n+3)2x\| = \|(2n+3)\left((2n+1)(y-x)-2x\right)+4x\| \\
\Leftrightarrow\ & \|(4n+2)(y-x)+(2n+1)2x\| = \|(2n+1)(2n+3)(y-x)+(2n+1)(-2x)\| \\
\Leftrightarrow\ & \|2(y-x)+2x\| = \|(2n+3)(y-x)-2x\| \text{ (on simplifie par } 2n+1) \\
\Leftrightarrow\ & \|(2n+3)(y-x)-2x\| = 2\|y\| = 2\|x\|.
\end{aligned}
$$

On conclut en remarquant que si $x \neq y$ alors $\|(2n+1)(y-x)-2x\| \to \infty$ as $n \to \infty$ ce qui contredit les égalités précédentes.

2. On suppose donc que $\|x\|y \neq \|y\|x$ et quitte à interchanger x et y on supposera que $\|y\| \geq \|x\|$. On écrit alors

$$
\begin{aligned}
\|x+y\| &= \|x+\|x\|\frac{y}{\|y\|}+\frac{y}{\|y\|}\left(\|y\|-\|x\|\right)\| \\
&\leq \|x+\|x\|\frac{y}{\|y\|}\|+|\|y\|-\|x\||
\end{aligned}
$$

Par inégalité triangulaire, $\|x+\|x\|\frac{y}{\|y\|}\| \leq 2\|x\|$ mais l'inégalité doit être stricte ! En effet, si il y avait égalité on pourrait appliquer le résultat de la question 1 aux vecteurs $x, \frac{\|x\|}{\|y\|}y$ ce qui nous donnerait que $x = \frac{\|x\|}{\|y\|}y$ qui est exclu par hypothèse.

3. On suppose qu'il existe trois solutions $t_1 < t_2 < t_3$ à l'équation. On pose $z_1 = x + t_1(y-x)$ et $z_2 = x + t_2(y-x)$, $z_3 = x + t_3(y-x)$ et enfin on choisit $s \in]0,1[$ tel que $t_2 = st_1 + (1-s)t_2$ de sorte que $z_2 = sz_1 + (1-s)z_3$. On a alors $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\|$ et on obtient une contradiction en utilisant la question puisqu'on devrait avoir

$$\|z_2\| < \|z_1\| + \|z_3\|,$$

ce qui est contradictoire.

4. L'égalité est triviale si (x,y) est un système de vecteurs lié. On peut donc supposer que (x,y) est libre et ensuite on écrit :

$$
\begin{aligned}
\|x+y\| &= \|(x-y)+2y\| \\
&= \left\|\|x-y\|\frac{x-y}{\|x-y\|}+2\|y\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \\
&\overset{(\star)}{=} \left\|\frac{2\|y\|}{\|x-y\|}(x-y)+\frac{\|x-y\|}{\|y\|}y\right\| \\
&= \left\|\frac{2\|y\|}{\|x-y\|}x+\frac{\|x-y\|^2-2\|y\|^2}{\|y\|\|x-y\|}y\right\|.
\end{aligned}
$$

On multiplie tout par $\|x-y\|\|y\|$ et on récupère

$$\|y\|\|x+y\|\|x-y\| = \left\|2\|y\|^2x+\left(\|x-y\|^2-2\|y\|^2\right)y\right\|. \tag{3}$$

En raisonnant de même avec $\|y-x+2x\|, \|x+y-2y\|, \|y+x-2x\|$ on récupère les trois autres relations :

$$\begin{aligned}
\|y\|\|x+y\|\|x-y\| &= \left\|2\|y\|^2 x + \left(\|x-y\|^2 - 2\|x\|^2\right) y\right\| \\
&= \left\|2\|y\|^2 x + \left(2\|y\|^2 - \|x+y\|^2\right) y\right\| \\
&= \left\|2\|y\|^2 x + \left(2\|x\|^2 - \|x+y\|^2\right) y\right\| .
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente on obtient que parmi les quatres réels suivants deux au plus sont différents :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \|x-y\|^2 - 2\|y\|^2 \\
a_2 &= \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 \\
a_3 &= 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \\
a_4 &= 2\|x\|^2 - \|x+y\|^2.
\end{aligned}$$

Si $a_1 = a_3$ ou $a_2 = a_4$ c'est gagné. On se ramène alors au cas où $a_1 \neq a_3$ et $a_2 \neq a_4$. De par la question précédente on a forcément $\{a_1, a_3\} = \{a_2, a_4\}$. Si $a_2 = a_3$ c'est encore gagné, il reste donc à traiter le cas où $a_2 = a_1$ qui implique $\|x\| = \|y\|$. On a donc montré le résultat dès que $\|x\| \neq \|y\|$. On peut alors conclure par un argument de densité : si jamais $\|x\| = \|y\|$ alors le résultat sera vrai pour $(1+\epsilon)x, y$ et on fait tendre ϵ vers 0.

5. Cette question est relativement classique, c'est pourquoi elle est placée à la fin de l'exercice.

   On commence par définir

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

   La symétrie de $\langle , \rangle$ est immédiate et il est clair que pour tout $x \neq 0$ on a $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 > 0$. Le plus difficile à établir est la bilinéarité. On commence par démontrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$ on a $\langle x-y, z\rangle + \langle x+y, z\rangle = 2\langle x, z\rangle$. Pour ce faire on écrit (en utilisant l'hypothèse dans l'égalité du milieu) :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}\left(\|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) \\
= \ & \frac{1}{2}\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|x-z\|^2 + \|y\|^2\right) \\
= \ & 2\langle x, z\rangle.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, en fixant z on obtient que $f(u) := \langle u, z\rangle$ vérifie l'équation fonctionnelle : $f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. En prenant $y = 0$ cela donne que $f(x/2) = f(x)/2$ et donc cela donne que f est additive. Il s'en suit que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a classiquement $f(rx) = rf(x)$. On conclut en remarquant que $t \mapsto \|tx + y\|$ est Lipschitienne (par inégalité triangulaire) et donc $t \mapsto f(tx)$ est continue. Donc f est linéaire ce qui garantit que $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire.

□