Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On notera $p = \mathrm{P}(X = 1)$ ainsi que $q = \mathrm{P}(X = 2)$ et $r = \mathrm{P}(X = 3)$.

(1) Donner une relation que p, q et r doivent nécessairement satisfaire.

(2) Exprimer les espérances $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(X^2)$ en fonction de p, q et r.

(3) On suppose désormais que $\mathrm{E}(X) = 5/3$ et que la variance de X vaut $\mathrm{V}(X) = 5/9$. On cherche à déterminer les trois paramètres p, q et r.

(3a) Expliciter un système linéaire à trois inconnues dont (p, q, r) est solution.

(3b) Trouver les valeurs de p, q et r.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon \leq 1$. On se demande pour quelles valeurs strictement positives de c il est possible de trouver une fonction M non-nulle de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\forall t \in]-1, 0[\qquad M''(t) = -\frac{\varepsilon^2}{c^2} M(t) \tag{1}$$

et vérifiant de plus $M'(-1) = 0$ et $M'(0) = -\varepsilon^2 M(0)$.

(1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel ω pour que, pour tous réels A et B, la fonction

$$M(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

vérifie la relation (1). Dans la suite, on remplacera ω par la seule valeur positive vérifiant cette condition.

(2) On suppose $M(0) \neq 0$. Montrer que la fonction M de la question précédente vérifie les conditions supplémentaires $M'(-1) = 0$ et $M'(0) = -\varepsilon^2 M(0)$ si et seulement si $\tan\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = c\varepsilon$.

(3) On rappelle que la fonction tangente est définie par la formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Tracer le graphe de $x \mapsto \tan(x)$ sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ainsi que les graphes de $x \mapsto \frac{\varepsilon^2}{x}$ pour $\varepsilon^2 = 1$, pour $\varepsilon^2 = 0,1$ et pour $\varepsilon^2 = 0,01$.

(4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $\tan(x) = \frac{\varepsilon^2}{x}$ a exactement deux solutions sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, qu'on notera dans l'ordre croissant x_ε et y_ε.

(5) Montrer que les limites $\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon$ existent et les déterminer.

(6) On se donne une fonction f qui admet le développement limité suivant au voisinage de 0 : on a l'égalité $f(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + \varepsilon h(\varepsilon)$, avec $\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = 0$. On suppose que $f(\varepsilon)$ vérifie l'équation obtenue en (2) pour la constante c : autrement dit, on a $\tan\left(\frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\right) = f(\varepsilon)\varepsilon$. Déterminer les valeurs de a_0 et a_1.

.