Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soient B et H deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère un rectangle dont la base est de longueur B et la hauteur est H.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir un rectangle d'aire égale à 2 ?

(2) Quelle est l'espérance de l'aire du rectangle obtenu ?

(3) Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par la formule $f_n(t) = (t/n)^n \exp(t+n)$.

(1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

(2) Montrer que, pour tout $t > 0$ fixé, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ et que, pour $n \geq 1$ fixé, $\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = +\infty$.

(3) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \qquad \text{et que} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

(4) Pour tout $n \geq 1$, établir qu'il existe un unique réel strictement positif t_n qui vérifie

$$\forall t \in]0,t_n[,\ f_n(t) > f_{n+1}(t) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in]t_n,+\infty[,\ f_{n+1}(t) > f_n(t).$$

Donner une formule pour t_n.

(5) Montrer que t_n/n converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

(6) Regrouper les informations obtenues sur un dessin représentant l'allure des graphes des fonctions f_n.