Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2.

(1) Rappeler sans démonstration les valeurs de l'espérance $\mathrm{E}(X)$ et de la variance $\mathrm{V}(X)$.

(2) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(4X \leq X^2 + 3)$.

(3) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(\sin(X))$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R}) \text{ telles qu'il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$. Déterminer sa dimension et trouver une base de E.

(2) Montrer que si $M \in E$, alors pour tout entier $k \geq 0$, on a $M^k \in E$. On note a_k le coefficient sur la diagonale de M^k et b_k celui en dehors de la diagonale. Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k, b_k, a_1, b_1 et n.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a_1 + nb_1 = 1$, ainsi que $a_1 \geq 0$ et $b_1 \geq 0$.

(3) *(3a)* Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a l'égalité $a_{k+1} - b_{k+1} = (a_k - b_k)(a_1 - b_1)$.

(3b) Montrer qu'à l'exception d'un cas particulier, $a_k - b_k$ converge vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

(4) *(4a)* Montrer que la suite $(a_k + nb_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est stationnaire, c'est-à-dire que la quantité $a_k + nb_k$ ne dépend pas de k.

(4b) Déterminer la limite de M^k quand k tend vers $+\infty$. Autrement dit, déterminer les limites de a_k et b_k lorsque k tend vers $+\infty$.