Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On se donne $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + \cdots + X_n$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $Z_n = (-1)^{S_n}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $p_n = \mathrm{P}(Z_n = 1)$ et $q_n = \mathrm{P}(Z_n = -1)$, et on considère le vecteur $v_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$. Enfin, on introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

(1) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $v_{n+1} = A v_n$.

(2) Pour tout $n \geq 1$, exprimer v_n en fonction de la matrice A et du vecteur v_1 dont on précisera les coordonnées.

(3) Diagonaliser la matrice A.

(4) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une formule explicite pour v_n.

(5) En déduire si $\mathrm{P}(Z_n = 1)$ converge ou non quand n tend vers l'infini. Si oui, calculer la limite.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) On considère les ensembles suivants :

$$H = \{z \in \mathbf{C} \text{ tels que } \Im(z) > 0\} \qquad \text{et} \qquad D = \{z \in \mathbf{C} \text{ tels que } |z| < 1\},$$

où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z. Représenter graphiquement ces deux ensembles.

(2) Montrer que pour tout $z \in H$, le nombre complexe $\dfrac{1+iz}{z+i}$ est bien défini et appartient à D.

(3) Montrer que la fonction définie sur H et à valeurs dans D donnée par la formule $\dfrac{1+iz}{z+i}$ est une bijection. Quelle est sa fonction réciproque ?

(4) On remplace les inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions de H et D. La fonction est-elle encore bijective ?