Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Un festival de danse propose en parallèle trois cours, de niveau 1, 2 et 3. Le lundi, on suit un et un seul cours : le cours 1 avec une certaine probabilité p_1, le cours 2 avec une probabilité p_2 et le cours 3 avec une probabilité p_3. Si on est au niveau 3 le lundi, on y reste pour le mardi. Si on est au niveau 1 ou 2 le lundi, on a une chance sur deux de rester au même niveau le mardi, et une chance sur deux de monter au niveau immédiatement supérieur. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note q_i la probabilité que le cours suivi le mardi soit le n° i. On introduit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que $Au = v$.

(2) Si on est libre de choisir les p_i comme on veut, est-il possible d'avoir $q_1 = \frac{1}{3}$?

(3) Calculer l'inverse de la matrice A.

(4) Est-il possible d'avoir $(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$?

⋆⋆⋆

Exercice 2. On construit aléatoirement un intervalle de la manière suivante. On tire tout d'abord son milieu M selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On tire ensuite la longueur totale L de l'intervalle, qui est indépendante de M et suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On note $[X, Y]$ l'intervalle aléatoire ainsi produit.

(1) Expliquer rapidement pourquoi $X = M - \frac{L}{2}$ et $Y = M + \frac{L}{2}$.

(2) *(2a)* Calculer les espérances $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(Y)$.

(2b) Calculer les variances $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

On introduit Z la variable aléatoire qui vaut 1 quand $X > 0$ et qui vaut 0 quand $X \leq 0$.

(3) Calculer $\mathrm{P}(Z = 0)$. En déduire la loi de Z et son espérance.

(4) Montrer que pour tous réels y et z, il y a au plus un choix de (λ, μ) qui vérifie $\mathrm{E}(Y) = y$ et $\mathrm{E}(Z) = z$.