Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. Dans tout l'exercice, on associera à chaque $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ le graphe de fonction obtenu en reliant par un segment le point de coordonnées $(0, z_0)$ au point de coordonnées $(1, z_1)$, puis $(1, z_1)$ à $(2, z_2)$, et ainsi de suite jusqu'au dernier segment joignant $(n-1, z_{n-1})$ à (n, z_n).

On introduit les trois vecteurs de $\mathbf{R}^{n+1}$ suivants :

$$u = (1, 1, 1, \ldots, 1) \qquad w = (0, 1, 2, \cdots, n) \qquad y = (y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Enfin, on désigne par $\mathrm{Vect}(\ldots)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n+1}$ engendré par le ou les vecteurs listés entre les parenthèses.

(1) Avec la représentation graphique expliquée en début d'énoncé, tracer plusieurs éléments de $\mathrm{Vect}(u)$ et plusieurs éléments de $\mathrm{Vect}(w)$. Décrire $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(w)$.

(2) Déterminer le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Vect}(u)$.

(3) On cherche deux réels α et β et un vecteur $z \in \mathrm{Vect}(u, w)^{\perp}$ tels que $y = \alpha u + \beta w + z$. Déterminer un système linéaire à deux équations vérifié par (α, β) et montrer qu'il admet une unique solution. Si besoin, on pourra utiliser sans démonstration la formule $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(4) On considère $f(a, b) = \sum_{k=0}^{n} (a + bk - y_k)^2$. Montrer que f admet un unique point critique. Que remarque-t-on ? Commenter géométriquement ce résultat.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit λ un réel strictement positif, soit n un entier strictement positif. On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre λ. On définit la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

(1) Exprimer l'espérance et la variance de M_n en fonction de λ et de n. On pourra utiliser sans justification les valeurs de l'espérance et de la variance de X_1.

(2) Calculer l'espérance de $X_1(X_1 - 1)(X_1 - 2)$.

(3) On cherche un nombre réel a tel que la probabilité que λ appartienne à l'intervalle $[M_n - a, M_n + a]$ soit supérieure ou égale à $\frac{99}{100}$.

(3a) Démontrer que cela revient à montrer une inégalité qu'on précisera sur $\mathrm{P}(|M_n - \lambda| > a)$.

(3b) Donner une expression de a qui convient. Cette valeur de a pourra dépendre de n et de λ.

(4) On suppose l'inégalité $\lambda \leq 100$. Trouver un réel b qui ne dépend ni de λ ni de n tel que la probabilité que λ appartienne à l'intervalle $\left[M_n - \frac{b}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{b}{\sqrt{n}}\right]$ soit supérieure ou égale à $\frac{99}{100}$.