Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = x - e^{-\frac{1}{x}}$.

(1) On rappelle que $e = \exp(1)$ appartient à l'intervalle $]2, 3[$. En déduire que $e^{-2} < \frac{1}{4}$.

(2) Déterminer le domaine de définition de f et, si elles existent, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Si un ou plusieurs réels n'appartiennent pas au domaine de définition, pour chacun d'entre eux, déterminer la limite à gauche et la limite à droite de f en ce point.

(3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis que $f'(x) = 1 - g\left(\frac{1}{x}\right)$ pour une certaine fonction g qu'on précisera.

(4) Dresser le tableau de variations de $u \mapsto g(u)$ et montrer qu'il existe un unique réel c tel que $g(c) = 1$.

(5) Établir que f est positive sur $]0, +\infty[$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$. On considère une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la forme suivante

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels. On note $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

(1) Montrer que la famille $(e'_1, e'_2, e'_3, \cdots, e'_n) = (e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1})$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

(2) Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $u(e'_i)$.

(3) En fonction des valeurs des a_i, déterminer les dimensions du noyau et de l'image de u et proposer une base de ces sous-espaces vectoriels.

(4) Les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dorénavant tirés aléatoirement. Plus précisément, on fixe un réel $p \in [0, 1]$ et les a_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi du rang de M. En déduire l'espérance du rang de M.

(5) Soient $\alpha \in]0, 1]$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, le réel $p_n = \alpha - \beta n^{-\gamma}$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$. On reprend le contexte de la question précédente, en choisissant pour valeur de p le nombre p_n. Par exemple, pour $n = 3$, les variables aléatoires a_1, a_2 et a_3 sont indépendantes et chacune de loi de Bernoulli de paramètre p_3. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité de l'événement « la matrice est inversible ».