Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On pose P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(0,1,-1)$. On note D l'orthogonal de P.

(1) *(1a)* Montrer que P est de dimension 2.

(1b) Expliciter une base de D.

On note f la symétrie par rapport à D le long de P, c'est-à-dire la symétrie relative à la décomposition en somme directe $\mathbf{R}^3 = D \oplus P$ et laissant fixe la droite D. On notera M la matrice de f dans la base canonique. On n'aura jamais besoin de calculer cette matrice M.

(2) *(2a)* Soit $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N. Montrer que g est une symétrie.

(2b) On note h l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est NMN. Démontrer, sans calculer M, que h est une symétrie.

(3) *(3a)* Déterminer les sous-espaces vectoriels E et F tels que g soit la symétrie par rapport à E le long de F.

(3b) Déterminer, sans calculer la matrice M, les sous-espaces vectoriels E' et F' tels que h soit la symétrie par rapport à E' le long de F'.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ une suite de réels positifs décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(1) Donner, sans justification, deux exemples de suites vérifiant les hypothèses ci-dessus, l'un où la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et l'autre où cette série diverge.

(2) Pour tout entier $k \geq 0$, on note $w_k = \displaystyle\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j$. Montrer que cette somme contient 2^k termes. Soit $N \geq 1$. Trouver deux entiers p et q tels que $\displaystyle\sum_{n=1}^{2^N-1} u_n = \sum_{k=p}^{q} w_k$.

(3) Établir que, pour tout $N \geq 1$, on a $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{2^N-1} u_n \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$.

(4) Soit β un réel strictement positif. En appliquant le résultat précédent à $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln(2n))^\beta}$, démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.