Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit n un entier strictement positif. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$. Étant donné un endomorphisme u, on note $\operatorname{Ker}(u)$ son noyau et $\operatorname{Im}(u)$ son image.

(1) On suppose dans cette question que n est un entier pair, qu'on écrit sous la forme $n = 2k$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, on pose $e'_i = e_i + e_{k+i}$. On note $E_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$, $E_2 = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k})$ et $E_3 = \operatorname{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$.

(1a) Établir que $\mathbf{R}^n = E_1 \oplus E_2$.

(1b) Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_k, e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ et en déduire que $\mathbf{R}^n = E_1 \oplus E_3$.

On admettra qu'on a également $\mathbf{R}^n = E_2 \oplus E_3$. On note u la projection sur E_2 parallèlement à E_1 (parfois appelée « projection sur E_2 de direction E_1 »). On note v la projection sur E_3 parallèlement à E_2. Enfin, on note w la projection sur E_1 parallèlement à E_3.

(1c) Quelles sont les matrices de u, v et w dans la base $(e_1, \dots, e_n)$?

(1d) Démontrer qu'on a $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(v)$, $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(w)$ et $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Ker}(u)$.

(2) On suppose désormais que n est un nombre impair. Démontrer par l'absurde qu'il est impossible qu'il existe trois endomorphismes u, v et w de $\mathbf{R}^n$ tels qu'on ait à la fois $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(v)$, $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(w)$ et $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Ker}(u)$. .

⋆⋆⋆

Exercice 2. On se donne un entier $n \geq 1$ et X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Si besoin, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(a+b)^n$ à l'aide des coefficients binomiaux pour a et b des nombres *complexes*.

(1) *(1a)* Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(1b) Calculer, en fonction de la parité de n, la probabilité $\mathrm{P}(X_n \leq n/2)$.

(2) *(2a)* Montrer que, pour tout entier k, la partie réelle de i^k est égale à $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

(2b) Calculer l'espérance $\mathrm{E}\left(\cos\left(\pi X_n/2\right)\right)$.