Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On se donne un dé à 4 faces, numérotées 1, 2, 3 et 4. Ce dé n'est pas forcément équilibré : chaque face $i \in \{1,2,3,4\}$ a une certaine probabilité notée $a_i > 0$ d'être tirée. On modélise cela par $\Omega = \{1,2,3,4\}$ et P la probabilité associée. On s'intéressera aux événements $A = \{1,3\}$ et $B = \{1,2\}$.

On introduit les vecteurs $x = \left(\sqrt{a_1}, 0, \sqrt{a_3}, 0\right)$ et $y = \left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, 0, 0\right)$. On considère D la droite de $\mathbf{R}^4$ engendrée par le vecteur $z = \left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\right)$. Enfin, on note π la projection orthogonale sur D.

(1) Exprimer la probabilité conditionnelle d'avoir A sachant l'événement B en fonction de (a_1, a_2, a_3, a_4).

(2) Combien vaut la norme du vecteur z ? Autrement dit, calculer $\|z\|$.

(3) Calculer $\pi(x)$ et $\pi(y)$. On exprimera les résultats en fonction des coefficients a_i et de z.

(4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si les vecteurs $x - \pi(x)$ et $y - \pi(y)$ sont orthogonaux.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère A l'ensemble des fonctions continues définies sur $[-1,1]$, à valeurs réelles et vérifiant :

$$f(-1) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-1,1], \quad |f(x)| \leq 1.$$

On note B l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $[-1,1]$, à valeurs réelles et vérifiant :

$$f(-1) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-1,1], \quad |f'(x)| \leq 1.$$

Notez bien que l'inégalité porte sur $|f|$ dans la définition de A mais sur $|f'|$ dans la définition de B.

(1) *(1a)* Montrer que, pour tout $f \in A$, on a l'inégalité $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2$.

(1b) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n(x) = 1 - x^{2n}$. Montrer que f_n appartient à A. Calculer $I_n = \int_{-1}^{1} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$. Cette suite converge t-elle ?

(2) *(2a)* Montrer que si f appartient à B alors, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $|f(x)| \leq 1$.

(2b) Démontrer que si f appartient à B, alors on a

$$\forall x \in [-1,1], \quad -1 + |x| \leq f(x) \leq 1 - |x|.$$

On commencera par illustrer cette propriété grâce à un dessin.

(2c) En déduire que, pour tout $f \in B$, on a l'inégalité $\int_{-1}^{1} |f(x)| + |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq 3$.