*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de* $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

*Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

⋆⋆⋆

*Exercice 1.* Un lycée comporte 4 classes de terminale, numérotées de 1 à 4. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note $n_i$ le nombre d'élèves de la classe n° $i$. On note $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ le nombre total d'élèves de terminale du lycée. On suppose naturellement que $N$ n'est pas égal à zéro.

*(1)* On définit une variable aléatoire $X$ par la procédure suivante : on choisit l'un des quatre numéros de classe uniformément au hasard, puis $X$ renvoie le nombre d'élèves que comporte cette classe. Exprimer l'espérance de $X$ en fonction de $n_1$, $n_2$, $n_3$ et $n_4$.

*(2)* On définit une variable aléatoire $Y$ par la procédure suivante : on choisit parmi les $N$ élèves de terminale une personne uniformément au hasard, puis $Y$ renvoie le nombre d'élèves que comporte la classe de cette personne. Exprimer l'espérance de $Y$ en fonction de $n_1$, $n_2$, $n_3$ et $n_4$.

*(3)* Démontrer que l'espérance de $Y$ est supérieure ou égale à l'espérance de $X$. Ce résultat vous paraît-il intuitif ?

⋆⋆⋆

*Exercice 2.* On considère une boîte en carton de volume 1 mètre cube, sans couvercle, dont la base rectangulaire a pour dimensions $x$ et $y$, en mètres. On cherche les valeurs possibles de la surface totale des cinq parois de la boîte.

*(1)* Montrer que cela revient à étudier la fonction

$$f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$

sur l'ensemble $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x > 0 \text{ et } y > 0\big\}$.

*(2)* Montrer que $f$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut sur $A$.

*(3)* Démontrer que $f$ admet un et un seul point critique dans $A$. Déterminer ce point critique.

*(4)* Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de $f$.

*(5)* Soit $a$ un réel strictement positif. Montrer que pour tout $t \in \,]-a, +\infty[$, $\dfrac{1}{a+t} \geq \dfrac{1}{a} - \dfrac{t}{a^2}$ et en déduire que

$$\forall (x, y) \in A, \qquad f(x, y) \geq 3 \times 2^{2/3}.$$