Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère E l'ensemble de toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $\mathbf{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3,\qquad \forall x\in\mathbf{R},\qquad g(x)=\alpha+\beta\sin(x)+\gamma\sin(x)^2.$$

Autrement dit, E est l'ensemble des combinaisons linéaires qu'on peut former à partir des fonctions $f_0(x)=1$, $f_1(x)=\sin(x)$ et $f_2(x)=\sin(x)^2$.

(1) Évaluer la fonction $x\mapsto\alpha+\beta\sin(x)+\gamma\sin(x)^2$ en trois points donnant des valeurs différentes pour $\sin(x)$. En déduire que si cette fonction est nulle, on a nécessairement $\alpha=\beta=\gamma=0$.

(2) On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par $\varphi:\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\gamma\\-\beta\\-4\gamma\end{pmatrix}$. Montrer que la matrice de cette application (dans la base canonique) est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres.

(3) Montrer que, pour tout $g\in E$, la fonction g'' est aussi un élément de E.

(4) Trouver l'ensemble des éléments g de E tels que $g''+2g=0$.

(5) Quel est le lien entre la question 2 et le reste de l'exercice ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $b\in\,]0,1[$. On considère la fonction polynomiale $p(x)=x(x-b)(1-x)$.

(1) A priori, combien l'équation $p'(x)=0$ peut-elle avoir de solutions au maximum ? Sans faire de calculs, établir l'existence de deux réels distincts $\alpha\in\,]0,b[$ et $\beta\in\,]b,1[$ tels que $p'(\alpha)=p'(\beta)=0$.

(2) Quelle est l'allure du graphe de p ? En faire un dessin où apparaissent α et β.

(3) Soit $u\in\,]p(\alpha),p(\beta)[$. Montrer que l'équation $p(x)=u$ admet exactement trois solutions et discuter leurs positions par rapport 0, b et 1.

(4) On considère la suite définie par $y_0\in]0,b[$ et la relation $y_{n+1}=y_n+p(y_n)$ valable pour tout entier $n\geq0$. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\geq0$, on a $0<y_{n+1}<y_n$.

(5) Montrer que la suite $(y_0,y_1,y_2,\dots)$ converge vers un réel à déterminer. .