Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$ *; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $a_n = 2\cos\left(2^{-n-1}\pi\right)$ et pour $n \geq 1$, $b_n = 2/a_n$.

(1) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(2) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, écrire a_n sous la forme d'une expression faisant intervenir des racines carrées, des additions et le nombre 2.

(3) Établir par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'égalité

$$\sin\left(2^{-n-1}\pi\right)\prod_{k=1}^{n} a_k = \sin(\pi/2) = 1.$$

(4) Montrer que $2^n \sin\left(2^{-n}\pi\right)$ converge quand n tend vers l'infini vers un nombre qu'on précisera.

(5) En déduire que $2\prod_{k=1}^{n} b_k$ converge quand n tend vers l'infini vers un nombre qu'on précisera.

La question 5 établit un résultat découvert par François Viète, mathématicien du seizième siècle.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Alice et Bob jouent à pierre–feuille–ciseaux. Chacun choisit l'un des trois signes de façon cachée puis les signes sont révélés. Si les signes révélés sont feuilles–ciseaux, la personne ayant choisi les ciseaux a un score de 3 points et l'autre un score (négatif) de -3 points. En cas de duel pierre–ciseaux, la personne ayant choisi la pierre a un score de 2 points et l'autre -2 points. Lors d'un duel pierre–feuille, la personne ayant choisi la feuille a 1 point et l'autre -1 point. Enfin, si Alice et Bob choisissent le même signe, chacun marque 0 point.

On se donne p, f et c trois réels dans $[0, 1]$ tels que $p + f + c = 1$. La stratégie d'Alice consiste à choisir la pierre avec probabilité p, la feuille avec probabilité f et les ciseaux avec probabilité c. De même, on se donne p', f' et c' trois réels dans $[0, 1]$ tels que $p' + f' + c' = 1$ et la stratégie de Bob consiste à choisir la pierre avec probabilité p', la feuille avec probabilité f' et les ciseaux avec probabilité c'. Ces choix sont effectués de façon indépendante. Enfin, on introduit la matrice et les vecteurs suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} p \\ f \\ c \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} p' \\ f' \\ c' \end{pmatrix}.$$

(1) Exprimer le produit scalaire de v' et Mv en fonction de p, f, c, p', f', c'.

(2) Calculer l'espérance du score d'Alice et montrer qu'elle est égale au produit scalaire de v' et Mv.

(3) Trouver une base du noyau de M.

(4) Démontrer qu'il existe une unique stratégie (p, f, c) pour Alice qui est telle que l'espérance de son score soit nulle quelle que soit la stratégie (p', f', c') de Bob. Déterminer cette stratégie.

(5) Si Alice applique une stratégie autre que celle de la question précédente, montrer qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement négative et qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement positive.