

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve écrite de mathématiques 2024

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli, Igor Kortchemski

Durée : 4 heures

calculatrice interdite

1 Introduction

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois problèmes indépendants permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à proposer des questions abordables dans chaque partie, mais également à poser régulièrement des questions plus délicates. En particulier, le sujet était calibré de sorte à ce que les candidates et candidats les plus à l'aise en mathématiques puissent avoir le temps d'aborder la quasi-totalité des questions et de s'attarder sur les questions délicates, généralement placées en fin de problèmes.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les copies, y compris pour les faibles notes. La présence de nombreuses questions simples permet aux candidates et candidats les moins à l'aise en mathématiques de traiter une partie du sujet et d'obtenir quelques points, les récompensant de leur investissement en mathématiques. Nous leur conseillons donc de ne pas se censurer et de traiter ce qui est à leur portée. Nous demeurons très satisfaits du niveau des meilleures copies qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi une bonne maîtrise de toutes les parties du programme.

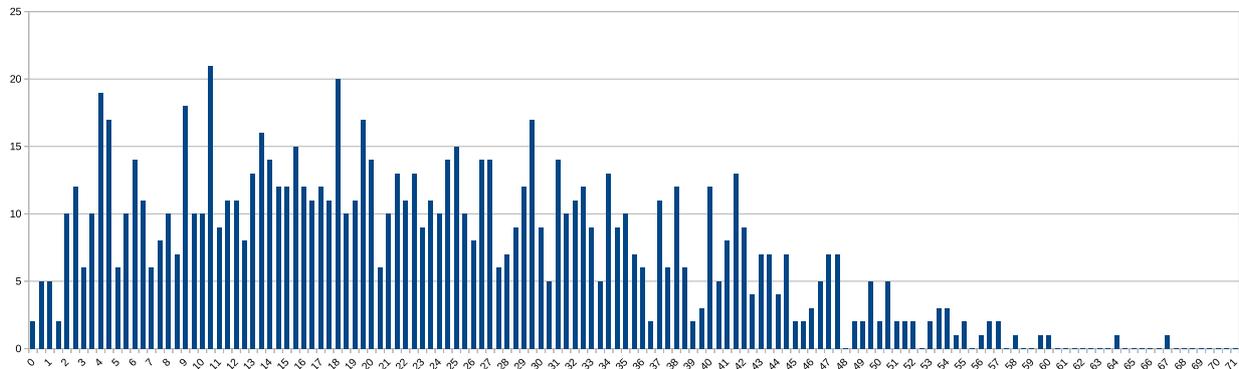
Notation utilisées. Nous utilisons dans la mesure du possible la notation figurant au programme officiel ; ainsi les ensembles de nombres sont notés \mathbb{N} , \mathbb{R} , etc., les probabilités et espérances respectivement P et E . Les personnes utilisant sur leur copie des notations usuelles différentes ne sont en aucun cas pénalisées. Nous rappelons que les lettres grecques sont couramment utilisées en mathématique et invitons les candidates et les candidats à en connaître a minima la graphie.

2 Notes des copies

Notes brutes et difficulté du sujet. Chaque question du sujet a été notée par un nombre entier allant de 0 à 4, puis pondérée par un facteur allant de 0.5 à 2. La note brute correspond alors au quart de la somme pondérée ; la note brute maximale ainsi possible était de 77 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 67 points. Les notes sont ramenées ultérieurement sur 20 par une transformation donnée plus bas.

Le bonus/malus de 2 points sur la note brute a été reconduit cette année pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions trop

brouillonnes ou imprécises. On obtient ainsi la distribution suivante des notes brutes, avec une moyenne de 21.5 et une médiane de 22.9.



Nous avons par ailleurs estimé pour chaque question son niveau de difficulté : de 1 pour les questions de cours ou de calculs numériques élémentaires jusqu'à 4 pour les raisonnements plus fins et les questions difficiles.

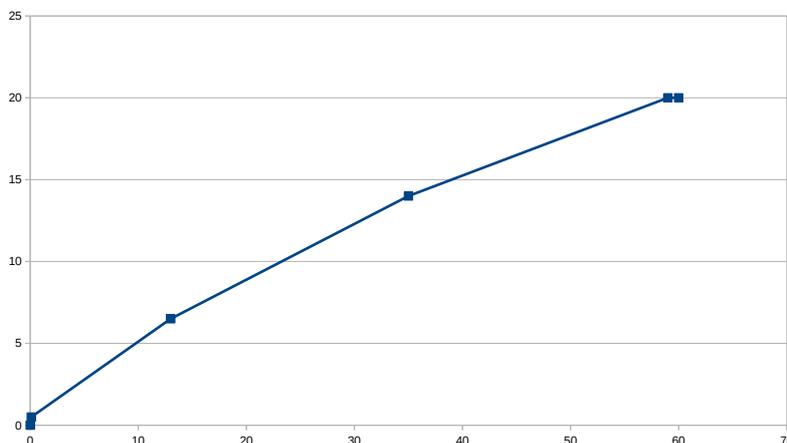
question	1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	6	7	8a	8b	8c	9a	9b	9c	9d	10a	10b	11
(coefficient)	1,5	1,5	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,5	1,5	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
difficulté	1	1	1	1	1	1	1	3	3	2	1	4	2	2	2	3	2	2	1	2	3	2	3	4
moyenne	3,1	3,0	3,2	3,0	2,5	2,6	2,3	1,9	1,1	1,9	2,6	0,4	2,1	2,3	2,6	2,7	2,4	2,4	2,5	1,8	2,2	2,3	2,1	1,6
≥ 0/4 (en %)	94	88	94	87	78	66	62	71	64	59	55	36	74	64	87	73	50	37	29	16	19	9	7	4
≥ 2/4 (en %)	73	67	83	71	53	44	38	34	14	25	41	1	41	39	71	61	32	21	18	8	12	6	4	1
≥ 3/4 (en %)	72	63	73	58	46	41	33	28	11	17	31	0	34	32	37	39	26	18	16	5	7	5	4	1

question	12a	12b	12c	13a	13b	13c	13d	13e	14a	14b	14c	15a	15b	15c	15d	15e	15f	16a	16b	17a	17b	17c
(coefficient)	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	0,5	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0	1,5	1,0	1,0	0,5
difficulté	1	1	2	1	1	1	2	3	2	2	3	2	2	4	4	1	3	1	2	2	2	2
moyenne	3,6	3,1	2,4	3,1	3,6	3,1	1,9	0,9	1,9	2,5	1,9	1,9	2,0	1,6	0,2	1,0	0,1	2,8	1,5	2,3	2,3	1,8
≥ 0/4 (en %)	97	93	68	94	97	93	67	31	67	51	37	52	30	11	4	8	6	81	45	34	18	11
≥ 2/4 (en %)	91	74	42	81	90	74	33	6	32	34	20	24	15	5	0	2	0	65	13	20	12	7
≥ 3/4 (en %)	89	72	38	65	89	70	25	5	23	29	14	19	12	4	0	1	0	46	11	18	10	3

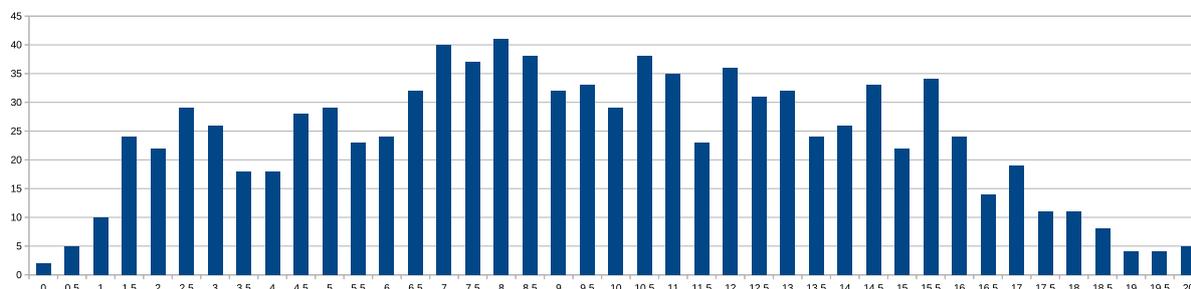
question	18a	18b	19a	19b	19c	19d	19e	19f	19g	20a	20b	20c	20d	20e	21	22a	22b	23a	23b	24a	24b	24c	24d
(coefficient)	2,0	1,0	1,0	0,5	2,0	1,5	1,5	0,5	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0
difficulté	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	1	2	3	3	2	2	2	3	3	1	2	3	4
moyenne	2,8	3,1	2,8	3,1	2,6	2,5	2,8	3,0	2,7	1,1	3,0	2,0	1,0	1,7	0,6	0,9	0,7	0,1	0,4	2,1	1,4	1,8	0,1
≥ 0/4 (en %)	92	87	82	74	68	60	41	37	26	44	56	25	32	15	6	21	8	8	3	25	10	6	8
≥ 2/4 (en %)	64	74	56	59	44	42	30	28	19	14	43	13	9	6	1	4	1	0	0	14	4	3	0
≥ 3/4 (en %)	63	64	54	53	37	36	26	27	15	10	40	12	3	5	1	2	1	0	0	12	3	2	0

Nous indiquons dans le tableau ci-dessus pour chaque question le coefficient appliqué, le niveau de difficulté que l'on a estimé, la moyenne sur 4 obtenue par les candidates et candidats ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant obtenu au moins la moitié des points et le pourcentage de copies ayant obtenu au moins trois quart des points.

Notes finales sur 20. Traditionnellement, afin d'obtenir une répartition de notes similaire à celle des autres matières, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes permet de ramener les notes sur 20. Depuis quelques années, le jury vise à ce que cette transformation soit la plus proche possible d'une transformation linéaire (c'est-à-dire avec un seul morceau), en faisant en sorte que l'étalement des notes soit obtenu directement sur les notes brutes.



Cette transformation a pour effet d'étaler les copies ayant obtenu de faibles notes tout en conservant un écart satisfaisant entre les meilleures copies. Le décrochement au niveau de 0 permet de distinguer les copies ayant obtenu 0 en note brute des autres. Sur les notes finales, la moyenne est 9.51, la médiane est 9.50 et l'écart-type est 4.70.



3 Conseils

Honnêteté. Nous rappelons qu'il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et contreproductives, toute ambiguïté étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Nous invitons les candidates et candidats à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés. Repérer une incohérence permet généralement de corriger une erreur. À défaut de réussir à la corriger, il y a tout intérêt à la signaler. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Mieux vaut une copie qui accepte et montre ses limites qu'une copie malhonnête.

Rédaction. L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne

pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. La rédaction des questions élémentaires, de plus en plus nombreuses et valorisées, joue un rôle important dans la notation, qui favorise largement les candidates et candidats répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à celles et ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Ainsi, la multiplication des questions élémentaires doit inviter les candidates et candidats qui se sentent moins à l'aise à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au jury qu'une démonstration *complète, concise, sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme et répondant bien à la question posée* a été trouvée.

- **Ambiguïté ou démonstration incomplète.** Des points seront systématiquement perdus si une partie du raisonnement est laissée floue. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner **tous les arguments** utilisés dans la résolution d'une question, si basique soit-elle.

Nous rappelons que les résultats des questions précédentes peuvent toujours être utilisés, qu'elles aient ou non été traitées. Dans ce cas, il s'agit d'invoquer le résultat de la question utilisée **au moment où on l'utilise**, et seulement à ce moment-là. Une rédaction type serait « D'après la question (Xx), on a [...] et donc on obtient [...] », et peu importe si la question (Xx) invoquée a été traitée. **Ce n'est pas utile d'indiquer qu'on admet une question que l'on n'arrive pas à démontrer!**

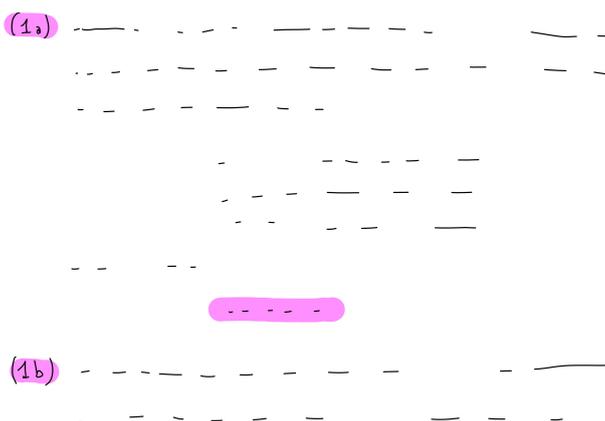
Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

- **Précision.** Insistons une fois de plus sur le fait qu'il faut répondre aux questions posées. Si on demande par exemple un vecteur propre, il faut donner un vecteur propre et non un sous-espace propre.
- **Concision.** La plupart des questions de l'épreuve peuvent être résolues à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les copies qui mettent cet argument en évidence par rapport à celles qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Nous encourageons enfin à ne pas faire figurer plusieurs réponses à une question, notamment si l'une est fausse car elle pénalisera très fortement l'autre.
- **Arguments erronés.** Énoncer – souvent de façon péremptoire – une affirmation manifestement fausse ne peut que jeter la suspicion sur toute la copie.
- **Rédaction et sténographie.** Nous avons apprécié la disparition presque complète de signes cabalistiques ou notations non-standards; nous encourageons vivement à poursuivre cet effort.

- **Orthographe et erreurs de calcul.** Même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter autant que possible d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières. Il existe de nombreux garde-fous en mathématique, nous conseillons de les utiliser ! Par exemple, une probabilité est entre 0 et 1, une exponentielle est strictement positive, etc.
- **Lisibilité.** Nous insistons à nouveau sur la lisibilité de la copie. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies. Nous rappelons qu'un argument illisible est systématiquement considéré comme faux. Nous rappelons également que la copie rendue n'est pas un brouillon. Quand plusieurs pistes ont été poursuivies, celles qui ont été abandonnées doivent être clairement rayées.

Présentation. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie fortement que les réponses soient présentées dans l'ordre. Bien séparer les différents problèmes, sur des copies différentes par exemple, est une bonne initiative, notamment pour pouvoir par la suite revenir à un problème commencé mais non terminé. Cela permet également de traiter les problèmes dans l'ordre souhaité puis de les remettre dans le bon ordre au moment de rendre sa copie.

Il est également demandé de **mettre les conclusions en valeur**, de préférence en les **surlignant** ou en les **encadrant**, a minima en les **soulignant**. Il est demandé de respecter les numérotations complètes des questions ((1a), (1b), (2a), etc.) et il est apprécié que **ces numérotations soient également mises en valeur** (en retrait dans la marge, surlignées, encadrées, en couleur, etc.) car il est courant pour les correctrices et correcteurs d'avoir à revenir en arrière sur une copie, ou de revenir sur une copie précédemment corrigée ; il est alors important de pouvoir facilement identifier la question recherchée. Voici un exemple de présentation idéale, où la numérotation et les réponses sont surlignées :



Par ailleurs, il est demandé de **ne pas recopier l'énoncé**. En plus de faire perdre du temps, cela est contreproductif car cela rend la copie plus difficile à lire et les réponses plus difficiles à cerner pour l'équipe correctrice. De même, il vaut mieux éviter les introductions ne menant nulle part ou les phrases non achevées comme par exemple « Montrons que la suite $(u_n)_n$ admet une limite. » ou « La suite $(u_n)_n$ admet une limite car » si on ne sait pas comment traiter la question.

Les copies étant numérisées, il est demandé d'utiliser des stylos noirs ou bleus pour le corps de texte. Pour la mise en lumière des résultats et des numéros de questions, les surligneurs et les stylos de couleur ne posent aucun problème de lecture. Seul le crayon de papier

est à éviter (également sur les illustrations telles les graphes de fonctions) car il résiste mal à la numérisation.

Lecture du sujet. Nous invitons à bien lire le sujet pour éviter des erreurs grossières. Il est courant de traiter d'un problème général et de regarder des cas particuliers ou des exemples. Utiliser les cas particuliers en dehors des questions concernées est bien évidemment dommageable. Nous avons veillé à bien insister dans le sujet sur ce point et n'avons observé que de rares confusions cette année.

4 Commentaires sur le sujet

4.1 Commentaire généraux

- Attention à simplifier les réponses : nous avons régulièrement vu des réponses finales telles que $\frac{2}{6}$, $\frac{6}{2}$, $e^{-\ln(2)}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$.
- Attention à proposer des **réponses cohérentes** : en particulier, une probabilité est toujours dans $[0, 1]$, l'espérance d'une variable aléatoire est comprise entre le minimum et le maximum des valeurs qu'elle peut prendre, une variance est positive, etc. Il faut également se demander ce que cela signifie lorsque la variance d'une variable aléatoire est nulle.
- Nous observons régulièrement ce que nous pourrions qualifier de problèmes de « ty-page », lorsque l'objet proposé en réponse n'est pas du type demandé. Par exemple, A devait être une matrice 3×3 , le produit scalaire $\langle v_1, v_2 \rangle$ devait être un réel, etc.
- On a noté quelques erreurs sur des notions de logique élémentaire (implication, équivalence).
- Il ne convient pas d'utiliser la locution « par définition » lorsqu'il ne s'agit pas d'une définition.

4.2 Commentaires détaillés.

PROBLÈME A.

- (1)
- (2) Questions bien réussies. Attention à simplifier au mieux les réponses : $\frac{2}{6}$, $\frac{20}{6}$, $\frac{6}{2}$, etc.
- (3)
- (4) (4b) Une preuve était attendue, en vérifiant par exemple que $P(S_1 \cap S_2) \neq P(S_1)P(S_2)$.
(4c) La notion de probabilité conditionnelle n'est pas toujours connue.
- (5) (5a) Il s'agissait de dire que Z est le premier i pour lequel S_i est réalisé.
(5b) Question difficile et peu réussie. Une justification mathématique était attendue, en regardant par exemple $P(Z = 1)$ et $P(Z = 2)$, ou encore $P(Z > 1)$ et $P(Z > 2)$, et en vérifiant que les valeurs obtenues ne correspondaient à aucune loi géométrique.

- (6)
(7) De nombreuses copies ont calculé $P(B = R_0 = k)$ et $P(V = R_0 = k)$ pour différentes valeurs de k mais n'ont pas sommé.
- (8) (8a) Beaucoup de difficultés à manipuler les fonctions min et exp.
(8b) Plutôt bien réussie.
(8c) Des tracés souvent approximatifs sur la partie linéaire et un lissage récurrent au point d'abscisse 2.
- (9) Plutôt bien réussies. Toutefois, le conditionnement n'a pas toujours été bien pris en compte. Les répercussions d'erreur dans la valeur de λ n'ont pas été sanctionnées dans les questions suivantes.
- (10)
(11) Plutôt bien réussies lorsqu'abordées.

PROBLÈME B.

- (13)(13c) Nous avons régulièrement observé des variations qui auraient dû alerter, comme par exemple une fonction croissante de 0 à -1 .
- (13d) L'idée était de voir que cette inégalité était équivalente à $h(t) < -\ln(2)$ et utiliser l'étude précédente. On pouvait également étudier $t \mapsto \ln(2t) - t$, à condition de ne pas se tromper dans la dérivée et de ne pas conclure que cette fonction était majorée par $h(1)$.
- (13e) Question rarement comprise.
- (14)(14a) Il s'agissait de montrer par récurrence que $u_n > 0$.
- (14b) Des confusions entre la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la fonction g .
- (14c) On a régulièrement vu qu'une suite décroissante positive tendait nécessairement vers 0.
- (15)(15a) Beaucoup d'erreurs et de nombreuses réponses qui n'étaient pas des développements limités. Oubli récurrent du terme $o(s)$ et de nombreuses réponses utilisant la variable x .
- (15d) Question difficile, peu abordée. La « manipulation d' ε » ne semble pas habituelle.
- (15e) Cette application directe de la définition de limite n'a pas été vue.
- (15f) Question peu abordée et non comprise.
- (16) De nombreux calculs inutiles. Seules les dérivées partielles étaient demandées et aucun calcul n'était nécessaire pour trouver les extremums locaux. L'absence d'extremums locaux semble avoir dérouté de nombreuses personnes.
- (17)(17c) Il ne fallait pas oublier d'invoquer la bijectivité de $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$.

PROBLÈME C.

- (18)(18b) Il fallait argumenter pour déduire l'inversibilité à partir de l'égalité $A^T A = I_3$, soit en disant que $A^{-1} = A^T$, soit en disant qu'il existait une matrice qui, multipliée par A , permettait d'obtenir I_3 . On pouvait également montrer l'inversibilité sans utiliser l'égalité $A^T A = I_3$.
On a parfois observé des arguments pour prouver non pas l'inversibilité de A mais celle de I_3 .
- (19)(19a) Il n'était pas demandé de détailler la méthode pour obtenir v_1 , ni de déterminer tout le spectre ; un simple calcul $A v_1 = v_1$ était suffisant.
Plusieurs personnes ont proposé le vecteur nul comme vecteur propre.
- (19d) Si l'on utilise le fait que (v_1, v_2, v_3) est orthogonale, il faut aussi mentionner que les trois vecteurs sont non nuls.
Beaucoup de copies écrivent que 3 vecteurs de \mathbf{R}^3 sont nécessairement générateurs, ou que 3 vecteurs non colinéaires – ou non colinéaires 2 à 2 – sont nécessairement libres.
Par ailleurs, nous avons souvent observé trois arguments : la famille est libre, la famille est génératrice, la famille comporte 3 vecteurs, sans qu'il soit clair quelles propriétés impliquent lesquelles et quelles propriétés sont à vérifier pour conclure.
- (20)(20a) Des confusions régulières entre $C + I_3$ inversible et $C^T + I_3$ inversible.
- (20b) Nous avons régulièrement observé des simplifications manquantes, faisant apparaître $I_3 C$ par exemple.
- (20c) Attention à ne pas utiliser de notions hors programme.
- (20d) Il ne fallait pas oublier de traiter à part le cas des coefficients tous nuls. Beaucoup de cas de division par un coefficient potentiellement nul.
- (21) Beaucoup de tentatives utilisant la question précédente, malgré l'absence de l'hypothèse nécessaire.
- (22) Les calculs ont rarement été bien menés.
- (23)
- (24)(24a) L'hypothèse $x \in E_1$ a régulièrement été ajoutée.
- (24b) La manipulation ensembliste a posé de nombreux problèmes de quantification.
- (24d) De nombreuses tentatives infructueuses donnant la formule générale d'un produit matriciel.