Banque BCPST Inter-ENS/ENPC/Mines - Session 2023

Rapport relatif à l'épreuve écrite de Mathématiques

Écoles partageant cette épreuve : ENS Paris-Saclay, ENS (Paris), ENS de Lyon, ENPC, Mines de Paris

Coefficients (en pourcentage du total des points de chaque concours) :
— ENS Paris-Saclay : 6,2 %
— ENS De Lyon : 6,6 %
— ENS (Paris) : 13,7 %
— ENPC/Mines : 17,5 %

Membre du jury : Amic Frouvelle

Le sujet était assez long. La première partie consistait à étudier le nombre de dérangements de n éléments, et permettait d'obtenir une formule exacte et un équivalent asymptotique. Le tout via des polynômes, une équation différentielle, des calculs de combinatoire. La deuxième partie, plus courte, permettait d'étudier un algorithme de simulation de tirage uniforme de dérangements par une méthode de rejet. La troisième partie, plus longue et plus difficile, étudiait un algorithme de rejet plus évolué basé sur la décomposition en produit de cycles d'une permutation. Il y avait enfin une dernière partie très courte d'ouverture.

Le niveau et le style des copies était très varié. Certaines copies ne contenaient que les réponses aux questions les plus faciles dans toutes les parties, d'autres n'ont traité que les deux premières parties. En traitant parfaitement les questions de l'introduction, de la partie **I**, et la question **1** de la partie **II**, il était possible d'obtenir la note maximale de 20/20 (c'était le cas pour une copie). Trois copies sont allées au-delà de la note maximale. À part les questions **3.b.** et **3.c.** de la partie **III** et les questions d'ouverture de la partie **IV**, chaque question a été traitée parfaitement dans au moins quelques copies. L'introduction et la partie **I** ont été les plus traitées, mais la plupart des questions des parties **II** et **III** ont été abordées dans plus de la moitié des copies.

Corrigé - Commentaire détaillé question par question

Introduction

a. $d_4 = 9$ (six cycles de longueur 4, trois doubles transpositions). *Réussi dans les deux tiers des copies, un quart des copies oubliant les doubles transpositions — malgré l'exemple donné pour 9 personnes où on voit la possibilité de cycles de longueur deux. Quelques copies avec des erreurs de comptage — doublons ou oubli.*

b. La probabilité vaut $\frac{1}{12}$: $1 \to 3$ avec proba $\frac{1}{3}$ (choix parmi $\{2,3,4\}$), puis $2 \to 4$ avec proba $n = 4$ (choix parmi $\{1,4\}$), enfin $3 \to 2$ avec proba $\frac{1}{2}$ (choix parmi $\{1,2\}$). Si le tirage était uniforme la probabilité serait $\frac{1}{d_4} = \frac{1}{9}$. *Réussi dans les deux tiers des copies, le tiers restant étant partagé entre des copies n'ayant vraiment pas compris la procédure, ou simplement mal calculé les différentes probabilités.*

Partie I

1.a. On dérive et on obtient $(P_n + f_n)' = P_n + f_n$ qui se résout en $P_n + f_n = e^x$ (par la valeur initiale $P_n(0) = 1$ et $f_n(0) = 0$). *Seulement un quart des copies a utilisé la condition initiale, un gros tiers a résolu l'équation générique, une bonne partie des copies ayant eu du mal à voir la dérivée de f_n comme une simple dérivée d'un produit.*

1.b. En utilisant que l'exponentielle est bornée sur $[-1,0]$ par 1 et sur $[0,1]$ par e, on obtient par exemple pour $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant e\int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{d}t = \frac{e}{(n+1)!}x^{n+1}$, puis pour $x \leqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n}{n!}e\mathrm{d}t = \frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ ce qui donne le résultat. *Globalement peu réussi, avec des erreurs de signe pour le cas $x \leqslant 0$, et d'autres copies ne traitant simplement pas la question.*

1.c. En notant k_0 le plus petit indice k tel que $a_k \neq 0$, on obtient $\frac{Q(x)}{x^{k_0}} \sim a_{k_0}$ d'une part, mais également $|\frac{Q(x)}{x^{k_0}}| \leqslant |x|^{n-k_0+1} \to 0$ si $k_0 \leqslant n$. D'où la contradiction si $a_{k_0} \neq 0$. *Bien réussi dans la moitié des copies, quelques copies pas loin du résultat.*

1.d. En notant $Q_n(x) = P_n(x)P_n(-x) - 1$ (un polynôme de degré $2n$), on obtient pour $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} |Q_n(x)| &= |(e^x - f_n(x))(e^{-x} - f_n(-x)) - 1| \\ &\leqslant e^x|f_n(x)| + e^{-x}|f_n(-x)| + |f_n(x)||f_n(-x)| \quad \leqslant (1+e)C|x|^{n+1} + C^2|x^{2n+2}| \leqslant \widetilde{C}|x|^{n+1}, \end{aligned}$$

puisque $|x| \leqslant 1$. Et donc Q a ses n premiers coefficients nuls, il est bien de la forme $x^{n+1}R_n(x)$. *C'était une question un peu plus difficile qui nécessitait d'avoir le bon résultat à la question **1.a**, la moitié des copies ne l'ont pas traitée, seules 3 copies l'ont parfaitement réussie.*

2.a. Comme $\mathrm{Card}(S_n) = n!$, la loi de probabilité uniforme donne $p_{0,n} = \frac{\mathrm{Card}(S_{0,n})}{\mathrm{Card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$. *Question réussie dans toutes les copies.*

2.b. Un élément de $T_{\mathcal{I}}$ revient à faire une permutation sans point fixe de $E = [\![1, n]\!]$
mathcalI (avec E de cardinal $n-k$). Il s'agissait simplement de reformuler ce qui était donné dans l'énoncé pour dire que $\mathrm{Card}(T_{\mathcal{I}}) = \mathrm{Card}(S_{0,n-k}) = d_{n-k}$. *Étonnamment, question réussie seulement dans un tiers des copies, la moitié donnant un résultat complètement insensé.*

2.c. Les $T_{\mathcal{I}}$ sont disjoints, donc $\mathrm{Card}(S_{k,n}) = \sum\limits_{\mathcal{I} \text{ de cardinal } k} \mathrm{Card}(T_{\mathcal{I}}) = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

Donc $p_{k,n} = \frac{\mathrm{Card}(S_{k,n})}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}p_{0,n-k}$ (les cas $k = n$ et $k = 0$ donnent le même résultat). La somme de ces probabilités (événements formant une partition) vaut 1 ce qui donne le résultat voulu. *Réussite mitigée sur cette question, une partie des copies refaisant la question précédente si elle était mal traitée, ou arnaquant le résultat pour obtenir la probabilité voulue ; la plupart expliquant toutefois correctement le fait que la somme des probabilités vaut un.*

3.a. Si $G_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k$, on obtient $a_k = \sum\limits_{i+j=k, 0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{d_j}{i!j!}$.

De sorte que pour $k \leqslant n$ on a $a_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$.

Et pour $k > n$, on obtient $a_k = \sum\limits_{i=k-n}^{n} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} < \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$.

Très peu de copies (10%) ont bien réussi à donner la bonne expression selon que $k \leqslant n$ ou $k > n$, mais un tiers des copies contient un résultat correct pour $k \leqslant n$.

3.b. Il suffisait d'identifier les coefficients de degré n dans l'égalité des polynômes $G_n(x)P_n(-x) = D_n(x)(1 + x^{n+1}R_n(x))$, ce qui donne le résultat voulu. *Réponse correcte dans seulement une petite dizaine de copies, alors que tous les résultats nécessaires pour résoudre cette question étaient donnés.*

3.c. On a $G_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_{k,n}x^k$ où les $a_{k,n}$ sont dans $]0, 1[$. On sait que la limite de la première somme est $\frac{1}{1-x}$ (série géométrique, pour $|x| < 1$). Pour montrer que la deuxième somme tend vers 0, on a

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{2n} a_{k,n}x_k\Big| \leqslant |x|^{n+1}\sum_{i=0}^{n-1} |a_{n+1+i,n}||x|^i \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{\sum}\,{}^{+\infty}_{i=0}|x|^i = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

ce qui donne le résultat par encadrement. On a donc $G_n(x) \to \frac{1}{1-x}$ lorsque $n \to \infty$. On sait par ailleurs que $P_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} e^x$ (série exponentielle), on en conclut que $D_n(x) = \frac{G_n(x)}{P_n(x)}$ converge vers $\frac{e^{-x}}{1-x}$.

Une question très peu réussie (mais également très peu traitée, et pas du tout essentielle pour la suite). Les copies qui la traitent reconnaissent les séries géométriques et exponentielles, mais le traitement de la partie de $G_n(x)$ pour $k > n$ n'a été fait que dans un très petit nombre de copies.

4.a. On a $p_{k-1,n-1} = kp_{k,n}$ de sorte que

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k\geqslant 0} kp_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} p_{k-1,n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,n-1} = 1,$$

comme somme de probabilités d'événements formant une partition. *Question plutôt bien réussie, dans plus des deux-tiers des copies qui la traitent.*

4.b. De même, par transfert

$$\mathbb{E}[X_n(X_n-1)] = \sum_{k\geqslant 0} k(k-1)p_{k,n} = \sum_{k\geqslant 1}(k-1)p_{k-1,n-1} = \sum_{k\geqslant 2} p_{k-2,n-2} = 1.$$

Par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}[X_n(X_n-1)] = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]$ donc $\mathbb{E}[X_n^2] = 2$, et par la formule de König-Huygens, on obtient $\mathrm{Var}(X_n) = 1$. *Question réussie dans la moitié des copies la traitant. Dans une bonne partie des copies où le calcul par transfert n'aboutit pas, la linéarité de l'espérance et la formule de König-Huygens sont bien utilisées.*

5.a. On utilise **2.a.** et **3.c**, on reconnaît une série exponentielle, la limite est $p_0 = e^{-1}$. *Relativement bien réussie.*

5.b. On utilise **2.c** et on obtient $p_k = \frac{1}{k!}p_0 = \frac{e^{-1}}{k!}$. Puis $\sum_{k\geqslant 0} \frac{e^{-1}}{k!} = e^{-1}\cdot e = 1$. *Relativement bien réussie également.*

5.c. On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 1 (donc espérance et variance valent 1). *Très bien réussie lorsque traitée, quelques réponses farfelues.*

PARTIE II

1.a. Les échanges des passages précédents dans la boucle ne concernent que des indices entre 1 et i', avec $i' < i$. Les valeurs pour $k \geqslant i$ restent donc inchangées. En particulier avant le dernier échange on a $\sigma[n] = n$. On échange donc les valeurs $\sigma[j_n]$ et n (aux indices j_n et n). Donc à la position j_n on retrouve la valeur n, autrement dit $\varphi(j_n) = n$. On peut donc trouver j_n comme indice pour lequel la permutation donne n. Ou encore $j_n = \varphi^{-1}(n)$. *Question à moitié réussie, la clarté de la rédaction en français fait parfois défaut.*

1.b. On peut refaire le dernier échange (aux indices j_n et n) pour retrouver $\widetilde{\varphi}$. Comme précédemment, on a alors j_{n-1} l'indice de la liste (correspondant à $\widetilde{\varphi}$) dont la valeur vaut $n-1$, c'est-à-dire que l'on a $j_{n-1} = \widetilde{\varphi}^{-1}(n-1)$. Comme on connaît j_n à partir de φ, on obtient donc $\widetilde{\varphi}$ à partir de φ seulement, et donc j_{n-1} à partir de φ. *Question finalement mieux réussie que la précédente, la rédaction de cette question montrant parfois que la précédente était comprise mais très mal rédigée.*

1.c. Ce qui est admis correspond directement à l'injectivité : si φ est dans l'image de Φ, alors il n'y a qu'un antécédent $(j_2,\ldots,j_n)$. Les ensembles de départ et d'arrivée étant de même cardinal $n!$, on obtient la bijectivité. *Une question très peu réussie, on sent que les concepts d'injectivité et de surjectivité ne sont pas complètement compris. Quelques copies n'ont pas utilisé ce qui précède et ont tenté de montrer la surjectivité à la main, parfois avec succès... puis utilisé le cardinal pour obtenir l'injectivité !*

1.d. On note $(j_2,\ldots,j_n) = \Phi^{-1}(\varphi)$, et donc, par bijectivité,

$$\mathbb{P}(\Phi(J_2,\ldots,J_n) = \varphi) = \mathbb{P}(\Phi(J_2,\ldots,J_n) = \Phi(j_2,\ldots,j_n)) = \mathbb{P}((J_2 = j_2)\cap\ldots\cap(J_n = j_n)).$$

Par indépendance, comme $\mathbb{P}(J_k = j_k) = \frac{1}{k}$ (loi uniforme sur $[\![1,k]\!]$, et $j_k \in [\![1,k]\!]$), on obtient

$$\mathbb{P}((J_2 = j_2)\cap\ldots\cap(J_n = j_n)) = \frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

Donc $\mathbb{P}[\Phi(J_2,\ldots,J_n) = \varphi] = \frac{1}{n!} = \frac{1}{\mathrm{Card} S_n}$, ce qui correspond bien à une loi uniforme sur S_n. Chaque appel utilise $n-1$ fois la fonction `Unif` (une fois pour chaque passage dans la boucle). *Question plutôt réussie, même si parfois la rédaction n'était pas très claire.*

2.a. On a $Z_n \geqslant k$ si et seulement les $k-1$ premiers appels de la fonction `PermAlea` ont donné une permutation n'étant pas dans $S_{0,n}$. Ce sont des événements successifs indépendants, ayant chacun pour probabilité $1-p_{0,n}$. Donc $\mathbb{P}(Z_n \geqslant k) = (1-p_{0,n})^{k-1}$. On en déduit que $\mathbb{P}(Z_n \geqslant k) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (il fallait ici supposer que $n \geqslant 2$, pour s'assurer que $p_{0,n} \neq 0$, c'était une petite imprécision de l'énoncé). Comme on a $0 \leqslant \mathbb{P}(Z_n = \infty) \leqslant \mathbb{P}(Z_n \geqslant k)$ pour tout $k \geqslant 0$, on en conclut par encadrement que $\mathbb{P}(Z_n = \infty) = 0$. On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p_{0,n}$, qui a pour espérance $\frac{1}{p_{0,n}}$. *Question bien réussie, beaucoup de copies reconnaissent le cours sur les expériences de Bernoulli successives indépendantes. L'erreur la plus fréquente étant de montrer que $\mathbb{P}(Z_n = k) \to 0$ puis de vouloir en déduire $\mathbb{P}(Z_n = \infty) = 0$.*

2.b. On a $u_n = Z_n \cdot (n-1)$ puisque chaque appel de `PermAlea` nécessite $(n-1)$ appels de `Unif`. On a donc $\mathbb{E}[u_n] = \frac{n-1}{p_{0,n}} \sim \frac{n}{p_0}$ lorsque $n \to \infty$. *Question bien réussie. L'énoncé sous la forme « nombre moyen d'appels » a quelquefois été perturbant, certaines copies parlant ici de loi des grands nombres pour justifier qu'on voulait effectivement calculer l'espérance de u_n.*

2.c. Soit A l'événement « la permutation renvoyée lors de l'appel de `PermAleaRejet(`n`)` est égale à φ ». On considère le système complet d'événements $(Z_n = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. L'événement $A \cap (Z_n = k)$ correspond au cas où la fonction `PermAlea`(n) renvoie $(k-1)$ fois une permutation n'étant pas dans $S_{0,n}$ (ce qui se produit avec probabilité $(1 - p_{0,n})$ indépendamment à chaque fois) puis qu'au k-ième appel, la fonction `PermAlea`(n) renvoie φ (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{n!}$ d'après **1.d**). Par la formule des probabilités totales, on obtient donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(A \cap (Z_n = k)) = \sum_{k \geqslant 1} (1 - p_{0,n})^{k-1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{p_{0,n}} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{d_n} = \frac{1}{\mathrm{Card}(S_{0,n})}.$$

On obtient bien donc la loi d'un tirage aléatoire uniforme dans $S_{0,n}$. *Question très rarement réussie (réponse complète dans seulement deux copies) et traitée dans moins de la moitié des copies.*

Partie III

1.a. Se donner une permutation σ dans S_n telles que l'événement $C_{a_1,a_2,\ldots,a_\ell}$ soit réalisé correspond à se donner une permutation $\widetilde{\sigma}$ de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_\ell\}$, et d'avoir $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour $1 \leqslant i < \ell$, $\sigma(a_\ell) = a_1$, et $\sigma(j) = \widetilde{\sigma}(j)$ pour $j \neq a_1, \ldots, a_\ell$. Il y a donc autant de telles permutations que de permutations de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_\ell\}$, c'est-à-dire $(n-\ell)!$. *Bonne réponse dans un quart des copies. Dans beaucoup de copies, il n'était pas clair que les $a_2, \ldots, a_\ell$ étaient donnés, ce qui a donné lieu à de multiples réponses.*

1.b. On compte le nombre de permutations telles que $L_1 = \ell$. On a $n-1$ choix pour a_2, puis $n-2$ possibilités pour a_3, …, $n - \ell + 1$ possibilités pour a_ℓ (on a un arrangement $a_2, \ldots, a_\ell$ d'éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1\}$). Et une fois ces nombres fixés, on a d'après la questions précédentes $(n-\ell)!$ choix de permutations telles que l'on ait l'événement $C_{a_1,a_2,\ldots,a_\ell}$.

On a donc en tout $(n-1)\ldots(n-\ell+1)(n-\ell)! = (n-1)!$ permutations telles que $L_1 = \ell$. Donc $\mathbb{P}(L_1 = \ell) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

Lorsque $\ell = 1$, on compte les permutations telles que $\sigma(a_1) = a_1$, ce qui correspond aux permutations de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1\}$ et on obtient le même résultat (ou on pouvait utiliser le fait que $\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(L_1 = \ell) = 1$). *Question très rarement réussie (6 copies), beaucoup de raisonnement très verbeux et peu convaincants, il y a même un nombre conséquents de copies dans lesquelles il y avait « L'image de L_1 est $[\![1,n]\!]$, on a donc une loi uniforme ».*

1.c. Il faut utiliser le fait que tirer une permutation uniformément dans S_n conditionnellement à l'événement $C_{a_1,a_2,\ldots,a_\ell}$ revient à tirer uniformément une permutation de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_\ell\}$. On peut alors utiliser le résultat de la question précédente. On pouvait également directement compter les permutations telles que l'événement $(L_2 = \widetilde{\ell}) \cap (C_{a_1,a_2,\ldots,a_\ell})$ soit réalisé, de la même manière que précédemment, en comptant le nombre de choix possibles pour $a_{\ell+2}, \ldots, a_{\ell+\widetilde{\ell}}$, puis de permutations des éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_{\ell+\widetilde{\ell}}\}$. *Question réussie dans une seule copie, des idées dans quelques-unes, comprenant qu'on pouvait raisonner comme précédemment. Question globalement peu traitée*

2.a. Puisque pour $k \leqslant x \leqslant k+1$ on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, on obtient le résultat demandé par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$. En sommant et utilisant la relation de Chasles, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}$ d'une part, et $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ d'autre part, ce qui donne $h_n - 1 \leqslant \ln n$ et $h_n \leqslant \ln(n+1)$. *Question* *classique de comparaison somme-intégrale, très bien réussie dans un grand nombre de copies (et dans la plupart de celles qui l'avaient traitée).*

2.b. L'événement $H_n = 1$ correspond au cas où Y_n n'a qu'un élément, c'est-à-dire lorsque $U_n = n$, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{n}$. Donc $\mathbb{P}(H_n = 1) = \frac{1}{n}$.

Lorsque $k > 1$, on utilise le système complet d'événements $(U_n = \ell)_{\ell \in [\![1,n]\!]}$:

$$\mathbb{P}(H_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}((H_n = k) \cap (U_n = \ell)).$$

Comme $k > 1$, on ne peut pas avoir $H_n = k$ et $\ell = n$ (puisque l'on aurait alors $H_n = 1$). Lorsque $\ell > 1$, l'événement $(H_n = k) \cap (U_n = \ell)$ correspond au fait que $U_n = \ell$ et que $Y_{n-\ell}$ est une liste à $k-1$ éléments, c'est à dire que $U_n = \ell$ et $H_{n-\ell} = k-1$. Comme U_n et $Y_{n-\ell}$ sont indépendants, U_n et $H_{n-\ell}$ aussi, et donc

$$\mathbb{P}(H_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1) \cdot \mathbb{P}(U_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1).$$

Réussite mitigée. Si le cas $H_n = 1$ est bien compris, le cas $k > 1$ n'est résolu correctement que dans peu de copies, l'erreur la plus courante étant de prendre pour système d'événements les $(H_{n-\ell} = k-1)$ pour ℓ allant de 1 à $n-1$, ce qui n'a guère de sens.

2.c. On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_n] &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(H_n = k) = \mathbb{P}(H_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{k}{n} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(H_{n-\ell} = k) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} (\mathbb{E}[H_{n-\ell}] + 1) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_{n-\ell}],
\end{aligned}$$

le passage de la 2^e^ à la 3^e^ ligne provenant du fait que, lorsque $\ell \in [\![1,n]\!]$, la variable $H_{n-\ell}$ prend ses valeurs dans $[\![1, n-\ell]\!] \subset [\![1, n-1]\!]$.

On a alors, en utilisant d'abord ce résultat au rang $n+1$, puis au rang n (à la troisième ligne) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_{n+1}] - \mathbb{E}[H_n] &= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}[H_{n+1-\ell}] - \mathbb{E}[H_n] \\
&= 1 + (\frac{1}{n+1} - 1)\mathbb{E}[H_n] + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=2}^{n} \mathbb{E}[H_{n+1-\ell}] \\
&= 1 + \frac{n}{n+1}(-\mathbb{E}[H_n] + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}[H_{n-\ell}]) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

On obtient alors (comme H_1 vaut 1 avec probabilité 1)

$$\mathbb{E}[H_n] = \mathbb{E}[H_1] + \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}[H_{k+1}] - \mathbb{E}[H_k]) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = h_n.$$

Enfin on a d'après **2.a.** $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{h_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$. Lorsque $n \to \infty$, $\ln n \to \infty$ et le terme de droite de l'encadrement tend vers 1. On a de plus $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln \frac{n+1}{n} + \ln n}{\ln n} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} + 1$, qui converge aussi vers 1, donc $\mathbb{E}[H_n] = h_n \sim \ln n$.

C'était une des questions les plus longues, et qui a été traitée inégalement. Dans le premier calcul, dans de nombreux cas, il a été oublié de séparer le cas $k = 1$ des autres, comme c'était pourtant indiqué *au vu de la question précédente. Pour le calcul suivant plusieurs méthodes pouvaient fonctionner, comme utiliser la formule à la fois pour $\mathbb{E}[H_{n+1}]$ et $\mathbb{E}[H_n]$, puis de nouveau pour $\mathbb{E}[H_n]$ (le calcul était un peu fastidieux mais a été réussi dans les copies qui ne se perdaient pas dans les changements d'indice). Certaines copies ont intuité que la valeur de $\mathbb{E}[H_n]$ serait h_n et ont pu traiter la fin de la question. Il a été souvent utilisé, sans justification, le fait que $\ln(n+1) \sim \ln n$ pour conclure.*

Montrer que l'on a $\mathbb{E}[H_n] = 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_{n-\ell}]$. Calculer $\mathbb{E}[H_{n+1}] - \mathbb{E}[H_n]$, et en déduire une expression de $\mathbb{E}[H_n]$, puis montrer que l'on a $\mathbb{E}[H_n] \sim \ln n$ lorsque $n \to \infty$.

3.a. *Remarque : il y avait une erreur d'énoncé ici, il fallait inverser le rôle de F_n et F_n^c dans la formule.*

Il s'agit de noter que l'appel de `LongueursCyclesAleaRejet(`n`)` est équivalent à l'appel une première fois de `LongueursCyclesAlea(`n`)` avec retour de listeL si elle n'a pas d'éléments égal à 1 (dans le cas de l'événement F_n^c), ou suivi d'un nouvel appel (indépendant) de `LongueursCyclesAleaRejet(`n`)` si listeL a au moins un élément égal à 1 (dans le cas de l'événement F_n).

Si on note $\widetilde{T}_n$ une variable aléatoire donnant le nombre d'appels de `Unif` par ce nouvel appel indépendant de `LongueursCyclesAleaRejet(`n`)`, alors

$$\mathbb{P}(T_n = t) = \mathbb{P}((T_n = t) \cap F_n^c) + \mathbb{P}((T_n = t) \cap F_n) = \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \mathbb{P}((H_n + \widetilde{T}_n = t) \cap F_n).$$

En effet, dans le premier cas, le nombre d'appels de `Unif` est H_n. Dans le deuxième cas le nombre d'appels de `Unif` est $H_n + \widetilde{T}_n$. En utilisant le système complet d'événements $(H_n = s)_{s\in\mathbb{N}^*}$, on obtient

$$\mathbb{P}((H_n + \widetilde{T}_n = t) \cap F_n) = \sum_{s\geqslant 1} \mathbb{P}((H_n + \widetilde{T}_n = t) \cap F_n \cap (H_n = s)) = \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((\widetilde{T}_n = t - s) \cap F_n \cap (H_n = s)).$$

En utilisant que $\widetilde{T}_n$ est indépendante du premier appel de `LongueursCyclesAlea(`n`)` (donc de F_n et H_n), et qu'elle a la même loi que T_n, on obtient le résultat demandé.

Une autre manière de rédiger aurait été de noter $H_{n,k}$ le nombre d'éléments de la liste renvoyé au k-ième appel de `LongueursCyclesAlea(`n`)`, et $F_{n,k}$ l'événement correspondant à F_n à ce k-ième appel. Ces variables aléatoires et événements étant indépendants pour différents k, on obtient alors

$$\mathbb{P}(T_n = t) = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=t} \mathbb{P}((H_{n,k} = s_k) \cap F_{n,k}^c) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}((H_{n,i} = s_i) \cap F_{n,i}).$$

On peut alors retrouver la formule demandée à partir de ce résultat, en coupant la somme pour $k = 1$ et $k \geqslant 2$ (et en notant alors $s = s_1$).

Question en fin de sujet traitée par un très petit nombre de copies, une seule copie a explicitement remarqué l'erreur d'énoncé. Les explications ont été faites dans l'urgence de fin de rédaction et n'étaient pas de la plus grande rigueur, mais ont donné l'impression d'une compréhension raisonnable.

3.b. *L'erreur d'énoncé se répercutait ici, il fallait montrer $\mathbb{E}[T_n] = \frac{h_n}{p_{0,n}}$.* D'après ce que l'on a admis dans le paragraphe suivant l'algorithme 4, la probabilité que l'un des cycles soit de taille 1 pour une permutation tirée uniformément dans S_n (c'est à dire qu'elle ait au moins un point fixe) correspond à la probabilité que `LongueursCyclesAlea`(n) renvoie une liste avec au moins un élément de valeur 1 (c'est l'événement F_n). On a donc $\mathbb{P}(F_n) = 1 - p_{0,n}$.

L'algorithme 5 correspond à faire des appels successifs (indépendants) de `LongueursCyclesAlea`(n), en s'arrêtant au premier succès correspondant au cas où la liste renvoyée n'a pas d'élément égal à 1 (donc le succès arrive avec probabilité $p_{0,n}$). Comme à chaque appel de `LongueursCyclesAlea`(n) il y a au plus n appels de `Unif`, le nombre d'appels T_n de `Unif` est inférieur à n fois le nombre d'appels de `LongueursCyclesAlea`(n), qui suit une loi géométrique de paramètre $p_{0,n}$, et donc d'espérance finie. Donc T_n a également une espérance finie.

On peut donc écrire

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{t\geqslant 1} t\mathbb{P}(T_n = t) = \sum_{t\geqslant 1} t\mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{t\geqslant 1} \sum_{s=1}^{t-1} t\mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n)\mathbb{P}(T_n = t - s).$$

La double somme peut s'écrire, en utilisant Fubini et le changement d'indice $u = t - s$:

$$\begin{aligned}\sum_{s\geqslant 1}\sum_{u\geqslant 1}(u+s)\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n)\mathbb{P}(T_n = u) &= \mathbb{E}[T_n]\sum_{s\geqslant 1}\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n) + \sum_{s\geqslant 1}s\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n)\\ &= \mathbb{E}[T_n]\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{E}[H_n] - \sum_{s\geqslant 1}s\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n^c).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{t\geqslant 1}t\mathbb{P}((H_n = t)\cap F_n^c) + \mathbb{E}[T_n]\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{E}[H_n] - \sum_{s\geqslant 1}s\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n^c) = (1 - p_{0,n})\mathbb{E}[T_n] + h_n,$$

ce qui donne le résultat voulu. *De loin la question la plus difficile d'un sujet long, qui n'a donc pas vraiment été abordée.*

3.c. On fait de même qu'en **2.c** de la partie **II**. On fixe φ dans $S_{0,n}$ et on note A l'événement « la permutation renvoyée lors de l'appel de `PermAleaCycles(LongueursCyclesAleaRejet(`n`))` est égale à φ ». On considère le système complet d'événements $(Z_n = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ où Z_n compte le nombre d'appels de la fonction `LongueursCyclesAlea(`n`)`. L'événement $A\cap(Z_n = k)$ correspond au cas où la fonction `LongueursCyclesAleaRejet(`n`)` renvoie $(k-1)$ fois une liste ayant au moins un élément égal à 1 (ce qui se produit avec probabilité $\mathbb{P}(F_n) = (1 - p_{0,n})$, indépendamment à chaque fois) puis qu'au k-ième appel, la fonction `LongueursCyclesAlea(`n`)` renvoie une liste listeL telle que l'appel ensuite de `PermAleaCycles(`*listeL*`)` renvoie φ. Ceci se produit avec la même probabilité que lorsque l'appel direct de `PermAleaCycles(LongueursCyclesAlea(`n`))` renvoie φ, c'est à dire avec probabilité $\frac{1}{n!}$ d'après ce que l'on a admis dans le paragraphe suivant l'algorithme 4. Par la formule des probabilités totales, on obtient donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(A\cap(Z_n = k)) = \sum_{k\geqslant 1}(1 - p_{0,n})^{k-1}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{p_{0,n}}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{d_n} = \frac{1}{\mathrm{Card}(S_{0,n})}.$$

On obtient bien donc la loi d'un tirage aléatoire uniforme dans $S_{0,n}$.

Le nombre d'appel de `Unif` lors de l'appel de `PermAleaCycles(LongueursCyclesAleaRejet(`n`))` est $T_n + (n-1)$ (en effet `PermAleaCycles` requiert dans tous les cas $n-1$ appels de `Unif`, tout comme `PermAlea`). On a donc $v_n = \mathbb{E}[T_n] + n - 1 = \frac{h_n}{p_{0,n}} + n - 1$. Comme $\frac{h_n}{p_{0,n}} \sim \frac{\ln n}{p_0} = o(n)$, on obtient que $v_n \sim n$ lorsque $n\to\infty$. *De même ici, la question n'a pas vraiment été abordée.*

Partie IV

a. On s'attendait simplement à ce que les candidat·e·s notent qu'avec l'algorithme 5 de rejet basé sur les cycles, légèrement plus évolué que l'algorithme 2 de rejet simple, on gagne asymptotiquement un facteur $\frac{1}{p_0} = e$ en terme de nombre d'appels à la fonction `Unif`. *Certaines copies ont essayé de discuter de celà, sans jamais être très convaincantes.*

b. C'est une comparaison somme-intégrale comme dans la question **2.a** de la partie **III**, utilisant cette fois-ci la croissance de ln. Le calcul de l'intégrale se fait par intégration par parties. *Quelques bonnes réponses, une primitive de* ln *étant parfois connue par cœur.*

c. En remarquant que $\ln\left(\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!}\right) = (1-\varepsilon)n\ln n - \sum_{k=1}^{n}\ln k \leqslant -\varepsilon n\ln n + n - 1 \to -\infty$ par la question précédente, on obtient le résultat voulu. Comme $p_{0,n} = \frac{d_n}{n!} \sim p_0$, on obtient également que $\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{d_n} \to 0$ donc dès que n est assez grand, $n^{(1-\varepsilon)n} < d_n$.

La suite de la question était plus ouverte, on peut par exemple noter qu'un programme n'utilisant que de l'ordre de $(1-\varepsilon)n$ appels à la fonction `Unif` peut produire uniquement $n^{(1-\varepsilon)n}$ résultats différents au maximum, et qu'il ne peut donc pas produire tous les dérangements, au nombre de d_n. On ne peut pas espérer avoir un programme qui fasse mieux qu'un nombre d'appel asymptotiquement meilleur que n, comme l'algorithme 5. *La preuve de la limite a parfois été donnée correctement. On n'attendait pas de réponse très rigoureuse à la deuxième partie de la question, qui n'a pas vraiment été abordée.*