BANQUE MP INTER ENS - SESSION 2023

Rapport sur l'épreuve de Maths D

► **ÉPREUVE SPÉCIFIQUE À L'ENS ULM**
► **COEFFICIENT (EN % DU TOTAL D'ADMISSION) :** $5,6\%$ pour les deux options (MP et MPI).

Membres du jury : Lino Benedetto (correcteur), Kevin Destagnol (correcteur), Amaury Freslon (correcteur), David Harari (concepteur du sujet), Nataniel Marquis (correcteur), Yann Palu (correcteur).

L'épreuve de mathématiques D 2023 tournait autour de la notion de rang en algèbre. Plus précisément, on définissait deux propriétés de finitude des groupes abéliens et anneaux commutatifs, à savoir les propriétés (F) et (TF), qui correspondaient respectivement (en langage un peu savant) à être de type fini sur $\mathbf{Z}$ *en tant que* $\mathbf{Z}$*-module et en tant que* $\mathbf{Z}$*-algèbre. On utilisait aussi (TF) pour démontrer une extension des propriétés des déterminants (classiques sur les corps) aux anneaux commutatifs quelconques et pour en déduire une propriété d'invariance du nombre de vecteurs d'une base à un contexte plus général que celui des espaces vectoriels.*

Après ces généralités, venons-en au déroulement précis du problème.

- *La partie I visait à se familiariser avec les notions d'anneaux (F) et (TF), en étudiant leurs premières propriétés et en donnant quelques exemples et contre-exemples. À part la question* **5.** *(qui nécessitait un peu de travail), elle ne présentait pas de difficulté majeure.*
- *La partie II étudiait en détails le comportement des deux propriétés vis à vis des morphismes : elle permettait d'obtenir les groupes* A *ayant la propriété (F) comme ceux équipés d'un morphisme surjectif de* $\mathbf{Z}^r$ *vers* A *pour* r *un entier naturel, et les anneaux* R *vérifiant (TF) comme ceux équipés d'un morphisme surjectif d'un anneau de polynômes sur* $\mathbf{Z}$ *vers* R *(question* **2.***). On y démontrait également que la propriété (F) passe bien à un sous-groupe (questions* **3.** *et* **4.***) avec de plus une inégalité sur le rang, mais que la propriété (TF) ne passe pas à un sous-anneau (question* **5.***), ce dernier point étant un peu plus ardu.*
- *La partie III commençait par étendre une des propriétés classiques du déterminant et de la transposée de la comatrice aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif* A *quelconque (question* **2.***), en se ramenant d'abord à un anneau vérifiant (TF), puis à un anneau de polynômes sur* $\mathbf{Z}$ *(pour lequel le résultat se ramène à un corps vu son intégrité). On appliquait ensuite ces résultats pour démontrer de manière matricielle une caractérisation des applications* A*-linéaires surjectives de* A^n *sur lui-même (question* **3.***d)), après avoir aussi obtenu un analogue sur* A *du résultat classique sur le nombre minimal de vecteurs requis pour engendrer un espace vectoriel de dimension* n *(question* **3.***c)).*
- *La partie IV définissait une notion de matrices équivalentes sur* $\mathbf{Z}$*, plus fine que l'équivalence sur* $\mathbf{Q}$*. On y démontrait en particulier (question* **2.***) une condition nécessaire et suffisante sur le pgcd des mineurs pour avoir cette équivalence.*
- *Enfin, la partie V s'intéressait aux matrices de «petit rang», en majorant la dimension maximale d'un sous-espace d'un espace de matrices ne comportant que des matrices de rang au plus* r*.*

Remarques générales

- Cette année, 1351 candidats et candidates ont composé. Les notes attribuées se répartissent comme suit :

Plage de note	Copies	Proportion
$[0,4[$	488	36,1 %
$[4,8[$	350	25,9 %
$[8,12[$	307	22,8 %
$[12,16[$	138	10,2 %
$[16,20]$	68	5 %

Moyenne	6,7
Médiane	5,3
Étendue	4,8

- Il avait délibérément été choisi de présenter un énoncé ne comportant pas vraiment de question «bloquante», et sur lequel les candidats et candidates étaient guidé.e.s de façon assez précise, ce qui a pu faire apparaître le problème comme plus facile qu'à l'accoutumée. En conséquence, la correction a récompensé les rédactions précises, dans lesquelles les arguments apparaissaient clairement au lieu d'être juste esquissés. On constate ainsi qu'une plus grande partie des copies qu'à l'accoutumée a traité l'ensemble du problème[1] et qu'il y a une proportion non négligeable de notes supérieures à 10 en plus par rapport aux années précédentes.

- Certains candidats ou candidates ont remarqué quelques coquilles mineures et sans incidence sur l'épreuve. Il fallait notamment lire dans le préambule «On note $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ l'anneau (dont on supposera connu qu'il est intègre) des polynômes en r indéterminées...» et non «On note $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ l'anneau (dont on supposera connu qu'il est intègre) des polynômes en n indéterminées...» et «On dit que M a la *propriété* (F) s'il existe une partie finie S de M...» plutôt que «On dit que M a la *propriété* (F) s'il existe une partie finie S de A...».
- Traiter *entièrement* entre trois et quatre parties permettait d'être dans les cent meilleures copies tandis que traiter *parfaitement* les deux premières parties permettait d'obtenir une note autour de 10/20.
- Toutes les parties ont été abordées dans une partie non négligeable de copies et ont fait l'objet de traitement très satisfaisants. Seule la question **2.** de la partie IV n'a donné lieu à une solution parfaitement satisfaisante que dans une seule copie et a été extrêmement peu abordée, même par les toutes meilleures copies.
- La concision (mais pas au détriment de la précision) est toujours appréciée. Il n'est presque jamais profitable de détailler sur plusieurs pages la réponse à une question (sauf bien sûr lorsque la question est très difficile), ou de redémontrer des résultats explicitement au programme. Certaines questions comme la question **2.** de la partie III ont souvent par exemple donné lieu à de très longs et fastidieux calculs (qui souvent n'aboutissaient pas) lorsque le candidat ou la candidate n'a pas pensé à passer au corps de fractions.
- Certain.e.s candidat.e.s n'ont pas du tout saisi les subtilités du passage d'un corps à un anneau commutatif quelconque. Par ailleurs, certaines affirmations ont surpris les correcteurs. On a notamment pu lire que tout groupe abélien était de la forme $\mathbf{Z}^n$, que tout groupe abélien fini était de la forme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ou encore que tout anneau intègre est un corps. Il est à espérer que ces erreurs sont dues au stress de l'épreuve.
- Cette nécessaire concision ne saurait cependant s'obtenir au détriment de la clarté : un texte mathématique qui n'introduit pas ses notations, dont le style télégraphique mélange quantificateurs et expressions en français, ou qui passe sous silence une partie des arguments ne peut être compréhensible ou mis en valeur à la correction. On prendra donc soi d'éviter d'abréger la conjonction de coordination (pourtant seulement composée de 4 lettres !) «donc» par le symbole «$\Rightarrow$». Il est attendu que la différence d'ordre logique entre une déduction et une implication soit clairement comprise et maîtrisée. De même, par exemple en question **1.** de la partie IV, oublier de vérifier (ou de le mentionner) qu'un sous-groupe est non vide ou qu'une relation d'équivalence est symétrique a été pénalisé.
- Les correcteurs ont pris soin de ne donner des points qu'aux questions ou sous-questions entièrement traitées. Ainsi, un calcul intermédiaire qui n'aboutit pas à la solution n'est pas récompensé. De même, grappiller des points en ne traitant que les questions les plus faciles de chaque partie ne permet jamais d'obtenir une bonne note tandis qu'au contraire, la persévérance est récompensée.
- Enfin, signalons pour conclure (et comme tous les ans) qu'il est important de soigner la présentation, d'avoir une écriture lisible et une orthographe correcte.
- Dans la suite de ce rapport, nous indiquons, pour chaque question quelques statistiques : lorsque nous écrivons

3. a)	Abordée dans 479 copies	386 réponses complètes	74 réponses partielles

il faut comprendre que 479 copies (sur 1351) comportaient une tentative pour la question **3.** a) ; que parmi elles 386 l'ont parfaitement traitée ; et que 74 copies, sans obtenir tous les points, ont obtenu une proportion significative des points prévus pour la question.

Partie I

1. Souvent bien traitée lorsque la définition de sous-groupe engendré par une partie S était connue. On oublie cependant trop souvent de considérer également les inverses des éléments de S et pour une première question, il est bon de détailler en donnant explicitement le polynôme qui convenait.

1.	Abordée dans 1328 copies	670 réponses complètes	49 réponses partielles

2. Cette question a souvent donné lieu à des rédactions très peu satisfaisantes ou trop imprécises alors qu'on pouvait exhiber facilement un polynôme qui convenait. Il faut si on veut l'utiliser établir que $\mathcal{A}(S)$ est le plus petit sous-anneau de A contenant S ou le sous-anneau de A engendré par S (notions qui ne sont pas mentionnées dans l'énoncé), que $\mathcal{A}(\mathcal{A}(S)) = \mathcal{A}(S)$ ou que $\mathcal{A}$ est une opération croissante pour l'inclusion.

[1] Environ une soixantaine de copies a traité le sujet en entier ou en entier à quelques questions près.

2.	Abordée dans 1325 copies	826 réponses complètes	280 réponses partielles

3. Cette question a été réussie (avec plus ou moins de détails dans la rédaction selon les copies) par l'écrasante majorité des copies. À ce stade de l'épreuve, quelques détails pour justifier que les parties génératrices proposées en étaient bien étaient les bienvenus.

3.	Abordée dans 1277 copies	830 réponses complètes	333 réponses partielles

4. La condition (TF) n'a pas posé de problèmes aux candidat.e.s. Pour la condition (F), les rédactions précises ont été récompensées par rapport aux rédactions vagues.

4.	Abordée dans 1217 copies	561 réponses complètes	467 réponses partielles

5. Il s'agit de la première question discriminante qui n'a pas été réussie par une majorité de copies. Le raisonnement par l'absurde a souvent été entamé mais non mené à terme ou lorsqu'il l'était, la rédaction n'a que trop rarement été concise et parfaitement précise.

5.	Abordée dans 942 copies	301 réponses complètes	162 réponses partielles

Partie II

1. Question sans difficulté majeure. Les correcteurs ont récompensé les rédactions précises et notamment le fait de justifier ou de mentionner proprement que $f(n) = n$ pour un morphisme d'anneaux f et $n \in \mathbf{Z}$ par rappot aux rédactions elliptiques du type «Cela découle des propriétés d'un morphisme d'anneaux». À l'inverse, pas besoin de plusieurs pages de calculs pour effectuer ce type de vérifications.

1.	Abordée dans 1305 copies	729 réponses complètes	446 réponses partielles

2. a) On pouvait ici poser directement le bon morphisme ou raisonner par analyse-synthèse mais dans tous les cas bien prendre garde à justifier qu'on bien un morphisme ou à réaliser la synthèse. Cette question a, de façon surprenante, souvent été traitée à moitié.

2. a)	Abordée dans 1202 copies	529 réponses complètes	513 réponses partielles

2. b) Les deux implications étaient de difficulté à peu près équivalente et découlaient des questions précédentes. Les copies qui ont remarqué que, si $B = \mathcal{A}(\{s_1, \dots, s_n\})$, alors on pouvait choisir de se restreindre aux polynômes dans $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$ évalués en les s_i avec un nombre de variables fixé égal à n ont été valorisées. Cette subtilité rendait les raisonnements par équivalence peu convaincants.

2. b)	Abordée dans 1192 copies	423 réponses complètes	643 réponses partielles

2. c) Le raisonnement était très similaire à celui de la question précédente et a souvent été réussi lorsque la question précédente l'avait été.

2. c)	Abordée dans 1117 copies	676 réponses complètes	308 réponses partielles

2. d) Il s'agissait d'une conséquence immédiate des questions **2.** b) et **2.** c). Il n'était pas nécessaire ici de redémontrer que la composée de deux applications surjectives reste surjective.

2. d)	Abordée dans 1164 copies	970 réponses complètes	117 réponses partielles

3. a) Les cas $n = 0$ et $n = 1$ ont majoritairement été traités correctement lorsque les sous-groupes de $\mathbf{Z}$ étaient connus. Attention toutefois à l'assertion que pour tout entier a, $a\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ qui tombe en défaut lorsque $a = 0$.
Beaucoup de candidat.e.s ont confondu e_1 avec $(1, 0, \dots, 0)$, ce qui n'est pas ce qui est dit dans l'énoncé ! Enfin, pour obtenir un isomorphisme de groupes, il faut bien vérifier (même rapidement) qu'on a affaire à un morphisme de groupes et que ce dernier est injectif et surjectif.

3. a)	Abordée dans 1177 copies	540 réponses complètes	510 réponses partielles

3. b) Attention ici au fait que pour l'hérédité dans la question précédente, l'on a supposé $a \neq 0$. Il est donc nécessaire de traiter le cas $a = 0$.

3. b)	Abordée dans 1081 copies	419 réponses complètes	489 réponses partielles

3. c) Il s'agit ici de la seconde question vraiment discriminante et qui a été trop rarement faite parfaitement. Beaucoup de confusions entre les structures de groupe abélien avec $\mathbf{Z}^r$ et d'espace vectoriel sur $\mathbf{Q}^r$. Attention à bien être précis quand on parle du rang ou de la liberté d'une famille. Ces notions ne sont définies au programme de CPGE que dans le cadre des espaces vectoriels et ici il était bienvenu d'être extrêmement rigoureux.se sur structures considérées ainsi que sur là où vivaient les scalaires. L'énoncé poussait à considérer la base canonique $(e_1, \dots, e_r)$ du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^r$ puis à en déduire que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ était une famille liée du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^s$ car $r > s$ et, en chassant les dénominateurs, à en déduire

une relation de liaison à coefficients entiers entre ces vecteurs à laquelle appliquer u^{-1} qui est $\mathbf{Z}$-linéaire, contredisant alors la liberté dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^r$.
On pouvait également étendre l'isomorphisme entre $\mathbf{Z}^r$ et $\mathbf{Z}^s$ en un isomorphisme $\mathbf{Q}$-linéaire entre $\mathbf{Q}^r$ et $\mathbf{Q}^s$.

3. c)	Abordée dans 802 copies	214 réponses complètes	81 réponses partielles

4. Il fallait ici penser à utiliser les questions précédentes pour obtenir un morphisme surjectif $f : \mathbf{Z}^r \to M$ et le restreindre au sous-groupe $f^{-1}(B)$ pour B un sous-groupe de M. Attention à bien rédiger ce genre de questions d'application des questions précédentes qui ont trop souvent été rédigées à la va-vite et à bien citer tous les arguments et les questions précédentes utilisés.

4.	Abordée dans 994 copies	414 réponses complètes	30 réponses partielles

5. a) Cette question ne présentait pas vraiment de difficulté mais a souvent donné lieu à des rédactions très confuses et peu convaincantes.

5. a)	Abordée dans 967 copies	521 réponses complètes	106 réponses partielles

5. b) Même remarque qu'à la question précédente quand il suffisait d'écrire que tout élément de $\mathcal{A}(S)$ peut s'écrire comme somme de monômes de la forme

$$\lambda X^{i_0}(XY)^{i_1}\cdots(XY^m)^{i_m} = \lambda X^{i_0+i_1+\cdots+i_m}Y^{i_1+2i_2+\cdots+mi_m}$$

avec $i_1 + 2i_2 + \cdots + mi_m \leqslant m({}_0+i_1 + \cdots + i_m)$. En particulier, donner un N explicite était le bienvenu.

5. b)	Abordée dans 840 copies	517 réponses complètes	51 réponses partielles

5. c) Cette question a majoritairement été bien traitée lorsqu'elle a été abordée même si certain.e.s candidat.e.s se compliquent la vie alors que considérer XY^{N+1} suffisait !

5. c)	Abordée dans 815 copies	575 réponses complètes	35 réponses partielles

Partie III

1. Cette question ne présentait pas de difficulté particulière. Il suffisait de considérer $\mathcal{A}(S)$ avec S l'ensemble des coefficients des matrices de E. Attention au fait que les copies qui mentionnaient le sous-anneau engendré sans en détailler la construction ont été pénalisées puisqu'il s'agit d'une notion hors-programme.

1.	Abordée dans 910 copies	646 réponses complètes	41 réponses partielles

2. a) Le résultat est presque immédiat lorsqu'on pense à passer au corps de fractions et à justifier que la transposée de la comatrice et le déterminant sont à coefficients dans A. Malheureusement, une proportion trop faible des copies y pensent (bien que fait qu'un anneau intègre puisse se plonger dans son corps de fractions soit rappelé dans le préambule). Les preuves alternatives ont rarement été convaincantes. ces dernières essayaient de mimer les démonstrations du cours sur un corps mais nécessitaient en général *a minima* une division par 2, illicite si A est de caractéristique 2. Cela a eu pour conséquence de rendre la série de questions **2.** a), b), c) et d) assez discriminante.

2. a)	Abordée dans 776 copies	143 réponses complètes	145 réponses partielles

2. b) Cette question était tout à fait faisable en admettant la question précédente. Attention à bien préciser pourquoi, si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et si $M \in \mathcal{M}_n(A)$, alors $f(\tilde{M}) = \widetilde{f(M)}$ et $f(\det(M)) = \det(f(M))$.

2. b)	Abordée dans 675 copies	273 réponses complètes	119 réponses partielles

2. c) Il fallait utiliser les questions précédentes et cela nécessitait d'avoir un peu de recul sur le problème.

2. c)	Abordée dans 563 copies	201 réponses complètes	37 réponses partielles

2. d) Cette question, pour laquelle la stratégie est la même que pour la question **2.** a), a posé le même type de problèmes qu'en **2.** a). Attention à la rédaction pour les copies qui ont réussi la question **2.** a). Un minimum de détails est apprécié plutôt qu'un laconique «On raisonne comme en **2.** a)».

2. d)	Abordée dans 611 copies	78 réponses complètes	55 réponses partielles

3. a) Il s'agit d'une question assez classique qui a été réussie par une majorité des copies qui l'ont abordée.

3. a)	Abordée dans 857 copies	617 réponses complètes	18 réponses partielles

3. b) Cette question était très élémentaire mais a quand même donné lieu à de surprenants soucis avec le calcul matriciel par blocs dans certaines copies.

3. b)	Abordée dans 919 copies	626 réponses complètes	95 réponses partielles

3. c) Attention ici à ne pas invoquer que le rang de M_1 n'est pas maximal, ce qui n'a de sens que pour des matrices à coefficients dans un corps. Il fallait plutôt penser à considérer le déterminant de l'identité $I_s = M_1 N_1$ et établir que $\det(M_1) = 0$.

3. c)	Abordée dans 803 copies	324 réponses complètes	61 réponses partielles

3. d) Les correcteurs sont toujours surpris par les chemins tortueux (et pas toujours logiquement corrects) empruntés pour établir une série d'équivalences. Les équivalences sont souvent présentées dans le sens le plus naturel pour les établir de façon circulaire ! Seule l'implication $iv) \Rightarrow i)$ est triviale. Les autres implications ne présentaient pas de difficultés majeures et étaient plus ou moins de difficulté équivalente mais nécessitaient d'avoir un peu de recul sur cette partie III. Attention ici à nouveau à ne pas invoquer des résultats valables uniquement sur un corps !

3. d)	Abordée dans 859 copies	331 réponses complètes	320 réponses partielles

Partie IV

1. a) Cette question était très élémentaire. Bien prendre garde à justifier *proprement* qu'il s'agit d'un sous-groupe et à ne pas bâcler la rédaction des questions de ce type. Il fallait notamment citer *précisément* les items de la question III. **3.** d) utilisés.

1. a)	Abordée dans 986 copies	550 réponses complètes	286 réponses partielles

1. b) Mêmes remarques qu'en question précédente. Notamment bien préciser que l'inverse et le produit de deux matrices de $\mathrm{GL}_n(A)$ reste dans $\mathrm{GL}_n(A)$ par **1.** a).

1. b)	Abordée dans 972 copies	806 réponses complètes	78 réponses partielles

2. Cette question est sans aucun doute la plus difficile du problème. Elle a très peu été abordée et réussie parfaitement dans une seule copie. Elle a révélée que la notion de mineurs n'est pas maîtrisée et pose souvent problème.

2.	Abordée dans 490 copies	1 réponse complète	24 réponses partielles

3. Il était important de donner un contre-exemple explicite et de *justifier* qu'il s'agissait d'un contre-exemple. En particulier il fallait mentionner que deux matrices sont équivalentes sur **C** si, et seulement si, elles ont même rang, préciser le rang des matrices du contre-exemple et appliquer la question précédente. Donner deux matrices (même si elles conviennent !) sans justification ne saurait être récompensé.

3.	Abordée dans 513 copies	175 réponses complètes	36 réponses partielles

Partie V

1. Il s'agit d'une question qui a été extrêmement discriminante et qui a très peu été traitée de façon *parfaitement* satisfaisante. La formulation «Montrer qu'on peut supposer...» a sans doute posé problème. Il fallait justifier correctement que, quitte à remplacer r par un entier plus petit, on pouvait supposer que V contient une matrice M de rang exactement r. On a alors l'existence de U, P inversibles telles que $A = UMP$. Puis, il fallait justifier proprement qu'on pouvait remplacer le sous-espace vectoriel V par $UVP = \{UNP \ : \ N \in V\}$. Cela nécessitait de justifier que V et UVP ont même dimension et que le rang de UNP est le même que celui de N.

1.	Abordée dans 803 copies	62 réponses complètes	326 réponses partielles

2. a) Cette question est également difficile et a souvent donné lieu à de longs et fastidieux calculs. Pour $u_1, \ldots, u_{m-r}$ les lignes de B_{21}, $v_1, \ldots, v_{m-r}$ les colonnes de B_{12} et $B_{22} = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m-r}$, on a par hypothèse

$$\det \begin{pmatrix} tI_r + B_{11} & v_j \\ u_i & b_{ij} \end{pmatrix} = 0$$

pour tout nombre complexe t. Il suffisait alors d'identifier le coefficient de ce polynôme en t^r (à savoir b_{ij}) et en t^{r-1} (à savoir $-u_i v_j$). Il était indispensable de bien justifier comment obtenir ces coefficients.

2. a)	Abordée dans 606 copies	37 réponses complètes	208 réponses partielles

2. b) Cette question ne présentait pas de difficulté une fois que l'on pense à appliquer la question précédente à $B + C$ qui est toujours dans V.

2. b)	Abordée dans 608 copies	300 réponses complètes	9 réponses partielles

3. a) Il s'agit à nouveau d'une question discriminante. L'injectivité a été globalement bien traitée mais l'argument que $\varphi(V) \subseteq \psi(W)^{\perp}$ a souvent fait défaut pour conclure.

3. a)	Abordée dans 454 copies	34 réponses complètes	53 réponses partielles

3. b) Il suffisait ici d'invoquer le théorème du rang.

3. b)	Abordée dans 471 copies	181 réponses complètes	15 réponses partielles

4. a) Pour cette question, il suffisait d'appliquer la question précédente au sous-espace V des matrices obtenues en rajoutant $n - m$ colonnes de 0 aux matrices de E. Il était cependant apprécié de détailler quelque peu en précisant que cette opération est injective et préserve le rang.

4. a)	Abordée dans 445 copies	144 réponses complètes	18 réponses partielles

4. b) Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ des matrices dont les $n - r$ dernières colonnes sont nulles convenait.

4. b)	Abordée dans 474 copies	168 réponses complètes	23 réponses partielles