Banque MP inter-ENS - Session 2023,
Épreuve orale de mathématiques commune ULSR

Écoles concernées : ENS Ulm, ENS de Lyon, ENS Paris-Saclay, ENS Rennes

Le jury était constitué de Margaret Bilu, Paul Dario, Marco Maculan et Pierre Monmarché. Il y avait 464 admissibles et le jury a effectivement fait passer l'épreuve à 442 candidates[1]. Les notes s'étalent entre 8 et 19, la moyenne est de 13.9, la médiane est de 14 et l'écart type est de 1.8.

L'épreuve est commune aux écoles normales supérieures de Paris, Lyon, Paris-Saclay et Rennes pour les filières MP, MPI et INFO. Le poids relatif de l'épreuve pour chacun de ces concours est exprimé en pourcentage du total des épreuves du concours dans le tableau ci-dessous.

Ulm MP/MPI	Lyon MP/MPI	Paris-Saclay MP/MPI	Rennes MP/MPI	Ulm Info	Lyon Info	Paris-Saclay Info
13,9 %	10,8 %	15,4 %	15,4 %	13,3 %	11,3 %	13,2 %

Pour commencer, nous souhaitons féliciter les candidates et leurs enseignants pour leur excellente préparation. Le niveau était globalement élevé et les discussions mathématiques ont été appréciées par les membres du jury.

1 Déroulement de l'épreuve

- L'oral durait 45 minutes, sans temps de préparation, et se déroulait entièrement au tableau. L'examinateur dictait l'énoncé au candidat au début de la planche ou bien l'écrivait au tableau pour lui. Dans le cas où l'énoncé comportait plusieurs questions, celles-ci étaient en général données une à une.

- Il était possible d'assister en tant que spectatrice aux oraux, en s'enregistrant en avance sur une plateforme dédiée. Dans tous les cas, les spectatrices

[1] Dans ce rapport, l'accord est fait au féminin ou masculin en alternant entre chaque paragraphe.

devaient demander l'autorisation de la candidate, et celle-ci était libre de refuser si elle préférait être seule avec l'examinatrice.

- **Début de planche :** Pendant les 5-10 premières minutes, le jury laissait le temps au candidat de réfléchir sans intervenir sauf s'il était sollicité. Durant cette phase, quelques réflexes peuvent aider à se former une intuition sur le problème et à montrer son autonomie à l'examinateur : tester la validité de l'énoncé dans des cas simples (si la planche comporte des polynômes, étudier le cas des polynômes de petits degrés, si elle comporte des matrices ou des espaces vectoriels, étudier le cas des petites dimensions, ou le cas diagonalisable, etc.), faire un dessin. Il est aussi bien perçu de vérifier que toutes les quantités introduites dans l'énoncé ont bien un sens (par exemple, quand une série est introduite, il peut être bon de justifier en une phrase quel type de convergence est en jeu). Ceci permet d'initier la discusion avec l'examinateur tout en montrant que le cours est bien maîtrisé.

  Nous mentionnons que pendant cette phase de début de planche, en réfléchissant à l'exercice, le candidat peut tout à fait rester silencieux pour ne solliciter l'examinateur qu'une fois en possession d'éléments de réponse ; ou bien, en alternative, il peut partager certaines de ses réflexions à voix haute, pour indiquer par exemple à l'examinateur quelle direction il envisage. Cependant, débiter un flot ininterrompu de paroles dès le tout début de la planche n'est pas conseillé.

- **Corps de la planche :** Le corps de la planche consistait en une résolution de l'exercice avec des indications et une discussion avec l'examinatrice. Le niveau de difficulté des exercices pouvant être élevé au concours d'entrée des E.N.S, il n'était pas attendu des candidates qu'elles résolvent intégralement l'exercice sans aucune intervention de l'examinatrice, et la discussion avec cette dernière est un élément essentiel de l'évaluation.

  Parfois, lorsqu'un exercice était complètement traité, un second exercice était proposé à la candidate. Ceci était toujours bon signe. Cependant, le jury tient à rappeler que la note n'est pas proportionnelle à (ni même une fonction croissante de) l'avancement de l'exercice et que l'oral n'est pas une épreuve de rapidité : certaines candidates n'ayant pas fini la planche mais ayant proposé des directions de recherche pertinentes et fait preuve d'initiative ont obtenu une meilleure note que des candidates ayant terminé la planche mais avec beaucoup d'aide de la part de l'examinatrice.

  Nous mentionnons un point qui nous a paru important et a été majoritairement bien respecté : la plupart des candidates avaient le bon reflexe de demander à l'examinatrice quelles parties du tableau elles pouvaient effacer lorsque celui-ci commençait à être bien rempli ; c'est toujours plus prudent, car l'examinatrice n'a pas toujours vu tout ce qui a été écrit, en particulier si cela a été fait au moment de la phase de recherche individuelle de la candidate. Les examinatrices prenaient aussi par exemple soin de ne pas faire effacer à une candidate un calcul qui allait pouvoir resservir par la suite.

2 Qualités attendues des candidats et critères d'évaluation

2.1 Généralités

La majeure partie de l'évaluation portait sur les facteurs suivants :

- **Maîtrise du programme :** La maîtrise du cours est une condition essentielle à la réussite de l'épreuve. Il pouvait arriver qu'un examinateur pose une question de cours au candidat, parfois pour donner une direction de recherche, mais aussi pour s'assurer que la notion mathématique dont il était question était bien connue et maîtrisée du candidat. Ne pas connaître l'énoncé d'un théorème important du cours, ou bien énoncer des résultats faux, en contradiction claire avec les résultats du programme, et ce, sans se corriger (éventuellement après une remarque des examinateurs), étaient des facteurs rédhibitoires à la réussite de l'épreuve. Nous mentionnons finalement que les sujets des exercices balayaient tout le programme, une bonne préparation demandait donc d'avoir travaillé assidûment l'ensemble du contenu de celui-ci.

- **Recul :** Les exercices n'étaient pas des applications directes ou usuelles du cours, l'un des objectifs de l'oral étant de juger la réaction de la candidate face à un énoncé inconnu plutôt qu'une connaissance encyclopédique de classiques. La résolution de certains exercices pouvait demander une idée très particulière, il n'était alors pas attendu de la candidate qu'elle l'intuite, le jury étant dans ce cas attentif à la réactivité de la candidate aux indications.

- **Rigueur :** Un des facteurs essentiels de l'évaluation est la capacité des candidats à produire un raisonnement mathématiquement rigoureux. Sur ce point, nous souhaitons mentionner que deux niveaux d'argumentation sont à distinguer. Les exercices posés lors de l'épreuve nécessitent en général de mettre en place un raisonnement long comportant plusieurs étapes. Dans une telle situation, il est tout à fait possible, et même apprécié, de commencer par expliquer une idée de manière peu rigoureuse avant de se lancer dans la rédaction de la solution. Ceci permet d'avoir une idée de la structure générale de la démonstration que le candidat souhaite mettre en place. Il faut cependant être capable de formaliser précisément l'argument lorsqu'on y est invité par l'examinateur. La capacité des candidats à fournir un argument rigoureux et précis est un point important de l'évaluation, et une qualité fondamentale d'un futur enseignant-chercheur.

- **Autonomie et dynamisme :** On attend des candidates une certaine autonomie et un certain dynamisme : si on n'a pas d'idées pour attaquer le cas général, traiter au moins quelques cas particuliers, selon le type de problème, qui vont permettre de lancer la discussion avec le jury. Les examinatrices ont dû encore trop souvent suggérer l'étude de ces cas particuliers aux candidates. Nous mentionnons finalement qu'un oral où l'examinatrice intervient peu est en général le signe que la candidate fait preuve d'autonomie.

2.2 Quelques remarques spécifiques

Le jury est globalement satisfait de la maîtrise du programme par les candidates, avec cependant des disparités suivant les thématiques :

- Le programme de probabilités était globalement bien maîtrisé : les candidats étaient à l'aise pour les calculs d'espérance et de variance, reconnaissaient rapidement les lois usuelles et les cas d'applications des inégalités du programme. Plusieurs exercices impliquaient des modèles et notions de probabilités plus ou moins avancés (e.g., les exercices 1, 9 et 10 ci-dessous). Ces derniers ont dans leur ensemble été bien traîtés par les candidats.

- Le cours d'algèbre linéaire était aussi bien maîtrisé dans son ensemble, et certaines candidates avaient même des connaissances bien au-delà du programme (pas du tout nécessaires, cf plus bas). A l'inverse, un certain nombre de candidates n'avaient pas le réflexe, lorsqu'elles rencontraient une matrice annulée par un polynôme scindé simple, de dire qu'elle était diagonalisable.

- Au sujet du programme d'analyse, le jury a trouvé qu'il était lui aussi bien maîtrisé, avec cependant quelques difficultés sur des points spécifiques :

  - Les questions de convergence de suites définies par des relations de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ étaient moins bien maîtrisées par les candidats : le lien avec les propriétés de la fonction f (variations, points fixes etc.) n'était pas toujours suffisamment exploité. En particulier, un dessin du graphe de la fonction n'apparaissait souvent au tableau que suite à une demande explicite de l'examinatrice.

- Dans les études des propriétés asymptotiques des suites et séries, il convient de faire attention aux règles de sommations des relations de comparaison, notamment lorsque le nombre de termes sommés tend lui-même vers l'infini.
- Le cas particulier de Cauchy-Schwarz où l'un des deux vecteurs est $(1, \ldots, 1)$ n'est souvent pas reconnu.

Au-delà de la connaissance du cours, mentionnons quelques autres points :

- Il convient de faire attention au hors programme : certains candidats ont souhaité utiliser des résultats ou formules hors programme mais vus en cours pendant l'année afin de résoudre un exercice. Ces notions peuvent faciliter la résolution de certains problèmes et étaient (dans la mesure du raisonnable) le plus souvent acceptées par les examinateurs. Dans cette situation, le candidat doit s'assurer que le résultat qu'il énonce est bien correct et être préparé à fournir une démonstration du résultat en question, qui lui sera très certainement demandée. Le jury doit cependant reconnaître que l'essentiel des candidats maîtrisaient les notions hors programme qu'ils souhaitaient utiliser.

  Notons également que, dans la mesure où l'utilisation de résultats hors programme pose des soucis d'équité entre les candidats (tout en ne faisant par définition pas partie des critères à évaluer au concours), le jury accorde une grande attention à ce que la maîtrise de tels résultats, jamais nécessaire, n'ait qu'un impact au mieux mineur sur la résolution des exercices.

- L'aisance technique des candidates fait partie des facteurs d'évaluation et il est attendu qu'elles soient capables de mener un bien un calcul un peu technique. Dans cette situation, le jury encourage les candidates à tenir un tableau bien organisé afin de minimiser les erreurs de calcul. Il est aussi judicieux de rechercher les raccourcis de calculs. Certaines simplifications des calculs à chaque étape auraient parfois permis un gain de temps et d'efficacité non négligeable aux candidates.

- Un certain nombre de candidats ont tendance à abuser un peu du caractère "oral" de l'examen, en n'utilisant que très peu le tableau. Rappelons que l'essentiel du raisonnement, surtout quand celui-ci est long, doit être écrit au tableau. On ne demande pas forcément une rédaction aussi complète que sur une copie, mais il faut que l'examinateur puisse avoir une vue d'ensemble des étapes de la preuve, et puisse vérifier facilement que rien ne manque. Si une explication rapide "avec les mains" est possible en début d'épreuve pour donner une direction générale à la démonstration ou en fin de planche lorsqu'il ne reste pas beaucoup de temps (et les examinateurs encourageaient d'ailleurs les candidats à raisonner de manière plus informelle à ce moment-là), une performance sera notée sur la rigueur et sur la clarté mathématiques, qui auront plus de mal à transparaître si le tableau n'est utilisé que comme brouillon.

3 Exemples d'exercices

Exercice 1. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes ayant un support fini. On dit que X est plus petite que Y pour l'ordre convexe, ce qui sera noté $X \preceq_{cvx} Y$, si et seulement si

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(Y)\right] \quad \text{pour toute fonction convexe } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que
$$f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right].$$
2. Montrer que si $X \preceq_{cvx} Y$ alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{var}[X] \leq \mathrm{var}[Y]$.
3. Montrer que $X \preceq_{cvx} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^{\infty} \mathbb{P}\left[X \geq x\right] dx \leq \int_a^{\infty} \mathbb{P}\left[Y \geq x\right] dx \tag{1}$$
4. Montrer que $X + \mathbb{E}[X] \preceq_{cvx} 2X$

Commentaire : La première question est essentiellement une question de cours qui a été bien traîtée. La deuxième question peut aussi être rapidement résolue et servait à faire manipuler la notion d'ordre convexe aux candidates. La troisième question constituait le coeur de l'oral, il s'agissait dans un premier temps de démontrer l'identité $\int_a^{\infty} \mathbb{P}\left[X \geq x\right] = \mathbb{E}\left[\max(X - a, 0)\right]$.

Exercice 2. On considère a_n, b_n deux suites telles que

$$a_n = 1 + o(1), \qquad b_n = 1 + o(1)$$

et u_n une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$u_{n+1} = a_n u_n + b_n u_{n-1}$$

Montrer que les suites $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{1}{n} \log u_n$ convergent.

Commentaire : Dans cet exercice, le candidat est face à une suite récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients non constants, mais qui est une perturbation de la récurrence linéaire $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Reconnaître ou résoudre cette dernière pour commencer, et ainsi intuiter la convergence de la suite v_n vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ était grandement apprécié par le jury.

Exercice 3. On considère un entier $k \geqslant 1$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(x)$ admet une limite pour $x \to \infty$. Peut-on en déduire que f admet une limite en $x \to \infty$, selon la valeur de k ?

Commentaire : Dans cet exercice, il était attendu que les candidates commencent par étudier les petites valeurs de k (essentiellement $k = 1, 2$). La plupart des candidates ont utilisé une méthode de variation de la constante pour ces cas-là, qui a été plutôt bien réussie.

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique, à valeurs propres toutes distinctes, et v un vecteur tel que la matrice $A + vv^T \in M_n(\mathbb{R})$ n'ait aucune valeur propre en commun avec A. Montrer que les valeurs propres de $A + vv^T$ correspondent aux zéros de la fraction rationnelle

$$F(X) = 1 + v^T(A - XI_n)^{-1}v$$

En déduire que les valeurs propres de $A + vv^T$ et celles de A sont entrelacées.

Commentaire : Dans cet exercice, les examinateurs appréciaient que le candidat commence la planche par expliquer pourquoi $F(X)$ était bien définie et rationnelle. En particulier, remarquer dès le début que $v^T(A - XI_n)^{-1}v$ était une matrice 1×1, c'est-à-dire en fait un scalaire, pourvait éviter des confusions plus tard pendant l'oral. De même, regarder par exemple le cas où la matrice était diagonale pouvait aider le candidat à se familiariser avec le problème.

Exercice 5. Soient $m \geq 1$ et $r \geq 2$ des entiers et $H_{m,r}$ l'ensemble des morphismes de groupes $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Calculer la proportion dans $H_{m,r}$ des morphismes surjectifs.

Commentaire : Dans cet exercice, la plupart des candidates ont eu le bon réflexe de traiter quelques petites valeurs de m à la main. Il était attendu que la candidate comprenne rapidement que les générateurs de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ jouent un rôle ici. La candidate devait alors reconnaître que pour m premier (ou une puissance d'un nombre premier) la question est plus facile et ensuite utiliser le théorème des restes chinois pour le cas général.

Exercice 6. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique. On note $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A. Montrer pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ l'inégalité

$$\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_k(A) \leq a_{11} + \ldots + a_{kk} \leq \lambda_{n-k+1}(A) + \ldots + \lambda_n(A).$$

Commentaire : Il s'agit ici d'une des directions du théorème de Schur-Horn pour les valeurs sur la diagonale d'une matrice symétrique dont les valeurs propres sont prescrites. Il était apprécié que les candidats commencent par étudier les cas simples $k = 1$ et $k = n$, et qu'ils mentionnent qu'il suffit de démontrer la borne inférieure de l'énoncé : pour toute matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ et tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_k(A) \leq a_{11} + \ldots + a_{kk},$$

l'autre inégalité pouvant être déduite en remplaçant A par $-A$.

L'indication suivante était donnée par la suite aux candidats : Montrer que pour tout sous-espace vectoriel $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension k, la somme $\sum_{i=1}^{k}(e_i, Ae_i)$ a la même valeur pour toutes les bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_k)$ de V.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ équipé de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Une application $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite contractante s'il existe $k < 1$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|A(x) - A(y)\| \leq k\,\|x - y\|$, et non expansive si $\|A(x) - A(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'une application contractante admet un unique point fixe.

2. Soient $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application non expansive et $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné tel que $A(K) \subseteq K$. Montrer que A admet un point fixe.

3. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application non expansive. Montrer que pour tout $R > 0$, l'application

   $$\tilde{A}(x) = \min\left(1, R\|A(x)\|^{-1}\right) A(x)$$

   est non expansive et admet un point fixe.

4. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application non expansive. On suppose que l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists\lambda \in [0, 1],\ x = \lambda A(x)\}$ est borné. Montrer que A admet un point fixe.

Commentaire : Cet exercice est une version en dimension finie du théorème du point fixe de Schaefer. La première question est relativement classique et a été bien traîtée par les candidates (l'indication de regarder la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ était rapidement donnée aux candidates qui ne connaissaient pas la solution). Pour la deuxième question, les indications suivantes ont pu être données : Supposer que $0 \in K$ et considérer la fonction $A_\epsilon := (1-\epsilon)A$.

Exercice 8. Soient $p, q \geq 2$ des entiers premiers entre eux. Calculer le développement en série entière $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ de la fraction rationnelle

$$\frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$$

en $z = 0$. Déterminer le plus grand entier k tel que $c_k = 0$.

Exercice 9. Soit un entier $N \geq 1$. On considère la suite aléatoire suivante : on choisit u_1 uniformément dans $[\![1, N]\!]$; puis à chaque étape, on choisit u_{n+1} uniformément dans $[\![1, u_n]\!]$. On considère ensuite l'ensemble aléatoire $E_N := \{u_i\}_{i\geq 1} \subset [\![1, N]\!]$.

1. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, déterminer la probabilité que $k \in E_N$.
2. Quelle est la probabilité que $2 \in E_N$ sachant que $3 \notin E_N$?
3. Calculer l'espérance de $|E_N|$ et en donner un équivalent lorsque $N \to \infty$.
4. Calculer la variance de $|E_N|$ et en donner un équivalent lorsque $N \to \infty$.

Commentaire. Pour la question 1, les candidats étaient encouragés à regarder certains cas particuliers : les petites valeurs de $N = 2, 3$. Le calcul donne que la probabilité cherchée est $\frac{1}{k}$. Les candidats étaient alors amenés à conjecturer que ce résultat restait valide pour les plus grandes valeurs de N, et à amorcer une démonstration par récurrence.

Les questions suivantes reposent sur l'identité $\mathbb{P}(i \in E_N | j \in E_N) = \mathbb{P}(i \in E_j)$, valide pour $i < j$, qui a été dans l'ensemble, sous une forme ou sous une autre, bien trouvée par les candidats.

Exercice 10. On construit un arbre aléatoire de la manière suivante: on commence par une racine S_1 ; on lui ajoute un premier descendant direct S_2. Puis, à l'étape $N+1$, on choisit un sommet S_i uniformément ($i \in [\![1, N]\!]$) et on lui ajoute un descendant direct S_{N+1}.

1. Calculer l'espérance et la variance du nombre de descendants directs de S_1 à l'étape N.

2. Calculer la probabilité que S_2 ait k descendants (directs ou non) à l'issue de l'étape N.
3. Calculer l'espérance et la variance du nombre de feuilles (sommets sans descendants) de l'arbre à l'étape N.