ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D’ADMISSION 2023

MERCREDI 19 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 5

PHYSIQUE (XULSR)

Durée : 4 heures

L’utilisation des calculatrices n’est pas autorisée pour cette épreuve

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants. On se contentera de réponses courtes, sauf lorsque l'énoncé demande d'expliquer, d'interpréter, ou de commenter.

I – Fusion thermonucléaire au cœur du Soleil

L'énergie rayonnée par le Soleil est issue des réactions nucléaires de fusion qui se produisent en son centre. Leur étude est l'objet de cette partie.

1. Le Soleil est constitué en majorité d'hydrogène et d'hélium. L'intérieur du Soleil est si chaud que les atomes sont entièrement ionisés. Comment appelle-t-on cet état de la matière ?

2. La fusion nucléaire est un processus dans lequel deux noyaux légers se rapprochent suffisamment pour fusionner l'un avec l'autre. La répulsion électrostatique rendrait ce rapprochement impossible en l'absence d'un phénomène de physique quantique, qui leur permet de franchir la barrière de potentiel. De quel effet s'agit-il ?

3. Nous étudions d'abord le cas simple, à une dimension, de l'état stationnaire d'énergie E d'une particule quantique de masse m, qui rencontre une marche de potentiel. L'énergie potentielle vaut 0 pour $x < 0$ et V pour $x \geq 0$, avec $V > E$. On note $\psi(x)$ la partie spatiale de la fonction d'onde de la particule dans son état stationnaire. Déterminer l'expression de $\psi(x)/\psi(0)$ pour $x > 0$. On notera $t(x) = \psi(x)/\psi(0)$.

4. On considère maintenant une barrière de potentiel de hauteur V et de longueur L : l'énergie potentielle est nulle pour $x < 0$ et $x > L$, et vaut V pour $0 \leq x \leq L$, toujours avec $V > E$. On admet que si le coefficient de transmission de la barrière, qu'on notera $\Theta(E)$, est très faible, son expression est approximativement donnée par $\Theta(E) = |t(L)|^2$, où $t(x)$ est la fonction déterminée à la question précédente. Préciser, en fonction des données du problème, comment se traduit mathématiquement la condition $\Theta(E) \ll 1$. Rappeler la définition du coefficient de transmission pour ce processus. Expliquer, sans calcul, pourquoi l'expression proposée n'est qu'approximative.

On considère maintenant le cas où l'énergie potentielle $V(x)$ dépend de x de manière continue. On suppose qu'elle vérifie toujours $V(x) > E$ pour $0 \leq x \leq L$ et $V(x) < E$ pour $x < 0$ et pour $x > L$, de telle sorte que la barrière de potentiel a une longueur L. On admet que le coefficient de transmission s'obtient approximativement en effectuant, dans le résultat de la question précédente, la substitution suivante :

$$(V - E)^{1/2} L \longrightarrow \int_0^L (V(x) - E)^{1/2}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

5. Nous allons appliquer ce résultat au cas où x désigne la distance relative entre deux protons se déplaçant sur un même axe, et $V(x)$ l'énergie potentielle de leur interaction électrostatique. Rappeler l'expression de $V(x)$ et tracer l'allure de sa variation en fonction de x pour $x > 0$. On notera e la charge électrique élémentaire.

6. Les protons sont initialement à grande distance l'un de l'autre. E est l'énergie cinétique de leur mouvement relatif, dont nous déterminerons l'expression plus loin. La fusion nucléaire a lieu lorsque les protons se trouvent au même point, soit $x = 0$. Exprimer la longueur L de la barrière de potentiel qu'ils doivent franchir pour que la fusion ait lieu, en fonction de E et des constantes fondamentales.

7. Calculer le coefficient de transmission $\Theta(E)$ en le mettant sous la forme $\Theta(E) = \exp\left(-(E_G/E)^{1/2}\right)$. On donne l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{u} - 1\right)^{1/2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Donner l'expression de E_G, dite énergie de Gamow, en fonction de la masse m de la particule et des constantes fondamentales.

8. Représenter la variation de $\Theta(E)$ en fonction de E.

9. On note v_1 et v_2 les vitesses des protons, en valeur algébrique, sur l'axe x. On note v_G la vitesse de leur barycentre et $v = v_1 - v_2$ leur vitesse relative. Exprimer la somme de leurs énergies cinétiques en fonction de v_G, v, et de la masse du proton m_p. Montrer que l'énergie cinétique E associée au mouvement relatif est l'énergie d'une particule fictive de masse μ dont on donnera l'expression en fonction de m_p.

On admet dans la suite que la masse m intervenant dans l'énergie de Gamow est en fait la masse μ qui vient d'être introduite.

10. Les deux protons considérés précédemment sont supposés appartenir à un gaz de protons que l'on modélise par un gaz parfait unidimensionnel à la température T. On note $P(v_1,v_2)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$ la probabilité élémentaire pour deux protons d'avoir des vitesses v_1 et v_2 à $\mathrm{d}v_1$ et $\mathrm{d}v_2$ près. Expliciter la dépendance de $P(v_1,v_2)$ en fonction de v_1 et v_2. On ne cherchera pas à déterminer la constante de normalisation, et on notera k_B la constante de Boltzmann.

11. On note $P^*(v_G,v)\,\mathrm{d}v_G\,\mathrm{d}v$ la probabilité élémentaire que la vitesse du centre de masse soit v_G à $\mathrm{d}v_G$ près, et que la vitesse relative soit v à $\mathrm{d}v$ près. Montrer que $P^*(v_G,v)$ peut se mettre sous la forme $P_G(v_G)P^*(v)$. Expliciter les expressions de $P_G(v_G)$ et de $P^*(v)$ aux constantes de normalisation près. Commenter la forme de $P^*(v)$.

12. On note $p(E)\mathrm{d}E$ la probabilité que l'énergie cinétique relative vaille E à $\mathrm{d}E$ près. Par un changement de variables de v à E, donner l'expression de $p(E)$ en fonction de E à une constante multiplicative près

13. On note $\Gamma(E)\mathrm{d}E$ le nombre de réactions nucléaires de fusion par unité de temps, pour une énergie relative valant E à $\mathrm{d}E$ près. On postule que $\Gamma(E)$ est proportionnel à $v\,p(E)\,\Theta(E)$. Comment interprétez-vous cette modélisation ?

14. En utilisant les résultats obtenus précédemment, exprimer $\Gamma(E)$ en fonction de E. On écrira le résultat sous la forme $\Gamma(E) = K\exp(-\phi(E))$, où K ne dépend pas de E, et on exprimera $\phi(E)$ en fonction de E, E_G et k_BT.

15. Étudier la variation de $\phi(E)$. Montrer que $\Gamma(E)$ possède un maximum pour une valeur de E qu'on notera E_0 et qu'on exprimera en fonction de E_G et k_BT.

16. Situer l'énergie E_0 par rapport à E_G et k_BT dans la limite où $E_G \gg k_BT$. Dans le cas de la fusion entre deux protons au cœur du Soleil, les valeurs numériques sont $E_G \simeq 500$ keV et $k_BT \simeq 1{,}5$ keV. Déterminer l'ordre de grandeur de E_0.

17. Déterminer l'expression littérale de $\phi(E_0)$ en fonction de E_G et k_BT, puis calculer son ordre de grandeur avec les valeurs numériques données plus haut.

18. Tracer l'allure de $\Gamma(E)$. Quelle est la particularité de la variation de $\Gamma(E)$ avec E dans la limite où $E_G \gg k_BT$?

19. Généraliser les résultats obtenus au cas de la fusion de deux noyaux de numéros atomiques Z_1 et Z_2, de masses m_1 et m_2 quelconques. Déterminer en particulier comment la valeur de μ et l'énergie de Gamow, E_G, sont modifiées.

20. Le taux d'une réaction nucléaire de fusion est défini comme le nombre de réactions de fusion par unité de volume et de temps, divisé par le produit des densités volumiques des deux noyaux impliqués dans le processus de fusion. Ainsi défini, le taux de réaction est indépendant des densités, et ne dépend que de la température. Une modélisation en trois dimensions, plus réaliste que celle développée jusqu'alors, donne un taux de réaction de la forme $a_i\,T^{-2/3}\exp\left(-(b_i/T)^{1/3}\right)$, où a_i et b_i sont des constantes qui dépendent de la réaction de fusion étudiée. La table ci-après donne les valeurs de ces constantes pour diverses réactions. b_i et T sont en unités de 10^9 K (milliards de Kelvin), et les unités des coefficients a_i sont telles que les taux de réaction soient en $\mathrm{m^3 s^{-1} mol^{-1}}$. On désigne le proton par p, le neutron (dont la masse est très proche de celle du proton) par n. Les symboles D, ^{3}He et ^{4}He désignent les noyaux des atomes correspondants (D = deutérium = ^{2}H), γ désigne le photon, e^+ le positon (électron chargé positivement) et ν_e le neutrino.

réaction	Valeur de a_i	Valeur de b_i (10^9K)
p+p $\to$ D+e^++ν_e	$a_1 = 4{,}08 \times 10^{-21}$	$b_1 = 38{,}65$
p+D $\to$ ^{3}He+γ	$a_2 = 1{,}81 \times 10^{-3}$	$b_2 = 51{,}52$
^{3}He+^{3}He $\to$ ^{4}He+p+p	$a_3 = 5{,}59 \times 10^4$	$b_3 = 1828$

Montrer que la modélisation développée précédemment permet de prédire certaines relations entre les quantités b_1, b_2 et b_3. Vérifier ces prédictions à l'aide d'applications numériques.

II – Rendement énergétique d'une machine thermique à sa puissance maximale

Lorsqu'une machine thermique cyclique fournit du travail en échangeant de la chaleur avec une source chaude et une source froide, de températures respectives T_1 et T_2, le rendement maximal de Carnot n'est approché qu'à la limite des processus réversibles. Mais ceux-ci sont trop lents pour produire une puissance mécanique appréciable. À l'inverse, les processus très rapides sont fortement irréversibles, et leurs rendements sont si bas qu'on ne peut guère en extraire de travail mécanique. Un compromis est nécessaire si on souhaite rendre maximale la puissance de la machine. Nous allons étudier cette optimisation dans le cadre de deux modélisations simples, dont la première a été introduite indépendamment par les physiciens Jacques Yvon et I. I. Novikov au milieu des années 1950, dans le contexte de l'industrie électronucléaire naissante.

21. On note Q l'énergie fournie par la source chaude au cours d'un cycle de cette machine ditherme, et W le travail qu'on peut en extraire. Définir le rendement η d'une telle machine.

22. Déterminer l'expression du travail maximum W_{max} qu'on peut extraire de la machine pendant un cycle en fonction de Q, T_1 et T_2, et l'expression du rendement maximal correspondant, qu'on notera η_0.

Premier modèle : transfert thermique

23. Nous considérons une machine dans laquelle l'énergie est produite par une source solide à la température T_1. Cette énergie est transmise à un fluide caloporteur de température T_3, avec $T_3 < T_1$, qui circule en contact avec la source solide. On suppose T_1 et T_3 uniformes et indépendantes du temps. On note Q l'énergie fournie par la source solide au fluide caloporteur pendant la durée τ d'un cycle. Donner l'expression de Q en fonction de τ, T_1 et T_3 et de la conductance thermique G_{th} de l'interface, supposée fixée.

24. Le fluide caloporteur constitue la source chaude d'une machine thermique ditherme dont la source froide est à la température T_2. Il restitue à cette machine thermique l'énergie Q fournie par la source solide. On suppose par ailleurs que cette machine thermique fonctionne à son rendement maximal. En déduire la dépendance du travail W qu'elle fournit en fonction de τ, T_3, T_1, T_2 et G_{th}

25. Tracer l'allure de la variation de la puissance extraite en fonction de T_3 pour T_1 et T_2 fixés.

26. Tracer l'allure de la variation du rendement η en fonction de T_3 pour T_1 et T_2 fixés. Que vaut la puissance extraite lorsque le rendement est maximal ? Commenter ce résultat.

27. Déterminer la valeur de T_3 qui maximise la puissance extraite de la machine thermique pour T_1 et T_2 fixés. On exprimera cette valeur optimale de T_3 en fonction de T_1 et T_2.

28. On note η_1 la valeur du rendement correspondant à cette valeur de T_3. Exprimer η_1 en fonction de T_1 et T_2.

29. Exprimer η_1 en fonction de η_0, déterminé à la question **22**, et représenter sa variation. Comment cette expression se simplifie-t-elle dans la limite où $\eta_0 \ll 1$?

Deuxième modèle : création d'entropie

30. On revient au cas général d'une machine thermique cyclique ditherme dont les sources chaude et froide ont les températures respectives T_1 et T_2. On note toujours Q l'énergie fournie par la source chaude pendant la durée τ d'un cycle. On suppose maintenant qu'une entropie $S_c = \Sigma/\tau$ est créée au cours du cycle, où Σ est un coefficient indépendant de τ. Commenter cette modélisation. Quel est le signe de Σ ?

31. Déterminer le travail W fourni pendant un cycle en fonction de Q, T_1, T_2, Σ et τ.

32. Montrer que pour Q fixé, la puissance est maximale pour une valeur de τ qu'on déterminera, et qu'on notera τ_2.

33. Calculer le rendement de la machine thermique lorsque la puissance est maximale. On le notera η_2.

Discussion

34. Comparer les valeurs des rendements à puissance maximale prédites par ces deux modèles. Dans quelle limite ces prédictions coïncident-elles ? Cette limite correspond-elle à une irréversibilité forte ou faible ?

35. Dans le cadre du premier modèle, déterminer l'expression de l'entropie créée au cours d'un cycle en fonction de Q, G_{th}, τ et T_1. Montrer qu'elle est proportionnelle à $1/\tau$ dans une limite qu'on précisera. Commenter ce résultat.

36. Le coût d'une centrale thermique provient d'une part du combustible produisant l'énergie, d'autre part de la construction de la centrale et de son fonctionnement. On considère une situation où l'un de ces deux coûts est très supérieur à l'autre. D'un point de vue économique, dans quel cas a-t-on intérêt à optimiser le rendement, et dans quel cas a-t-on intérêt à maximiser la puissance ?

37. Le réacteur Sizewell B est le plus grand réacteur nucléaire à eau pressurisée construit au Royaume-Uni, qui couvre environ 3% des besoins d'électricité du pays. Les températures des sources chaudes et froides pour ce réacteur sont $T_1 = 581$ K et $T_2 = 288$ K. Son rendement est $\eta = 0{,}36$. Commenter cette valeur à la lumière des résultats obtenus dans ce problème.

* * *

*