Banque PC inter-ENS – Session 2023

Rapport du jury relatif à l'épreuve orale de mathématiques

• **Écoles partageant cette épreuve** : ENS ULM, ENS DE LYON

• **Coefficients** (en pourcentage du total d'admission de chaque concours) :

– ENS ULM

* Option Physique : 17,1 %

* Option Chimie : 17,1 %

– ENS DE LYON : 7 %

• **Membres du jury** : A. Alvarez, R. Ducatez, F. Gabriel, J. Vovelle

• **Commentaire global :** On a pu observer une grande disparité entre candidats/candidates dans le niveau de préparation et la motivation à résoudre les exercices (et ici la fatigue semble entrer en jeu dans le cas des dernières séries). Le niveau global est cependant jugé bon, avec environ 10 % de candidats et candidates dont la prestation est jugée excellente.

• **Maîtrise du programme :** En algèbre, les notions sont dans l'ensemble bien assimilées – tant qu'on reste dans un cadre standard : des difficultés peuvent apparaître lorsque, par exemple, des considérations toplogiques interviennent. En analyse, une bonne distinction entre les différents modes de convergence de fonctions et séries de fonctions fait défaut trop souvent. Le maniement des sup et inf s'avère difficile même pour des candidats et candidates très à l'aise par ailleurs. En théorie des probabilités, on observe des candidats/candidates qui ne maîtrisent pas les bases, et mélangent des considérations ensemblistes sur les événements avec des calculs sur les nombres réels que sont les probabilités. On a cependant aussi assisté à d'excellentes interrogations, lors desquelles les outils probabilistes étaient aisément maniés pour étayer de très bonnes intuitions. Concernant la géométrie dans le plan, l'utilisation des nombres complexes s'est souvent révélée laborieuse.

Les difficultés mentionnées ici ont pu se manifester dans les exercices cités ci-dessous.

• **Résolution des exercices :** Font souvent défaut

- une analyse raisonnée du problème, exploitant : des dessins (on relève comme toujours leur suprenante absence), des études de cas simples (« N » petit s'il y a un paramètre entier N dans le problème par exemple, réduction du problème par ajout d'hypothèse, etc.),

- une réflexion sur le type de problème posé : il s'agit de prendre le temps d'identifier les thèmes mathématiques concernés par l'exercice, ainsi que les notions associées travaillées depuis le début de la prépa.

On conseille par ailleurs de garder en tête les éléments qu'on s'est proposé de démontrer et d'être réceptif lors des interventions de l'examinateur/examinatrice.

• **Quelques exemples d'exercices posés :**

Exercise 3. On considère E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\|\cdot\|$, et f un endomorphisme de E dans E tel que pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\| \leq \|x\| .$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}$$

où $f^{(k+1)} = f^{(k)} \circ f$ et $f^{(0)} = \mathrm{Id}$.

(1) Étudier la convergence de $s_n(x)$ lorsque $n \to \infty$.
(2) Donner un contre-exemple lorsque E n'est pas de dimension finie.

Exercice 16. Soit $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on pose

$$\underline{u}(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left[u(y) + \frac{1}{2\varepsilon} |x - y|^2 \right] . \tag{31}$$

1. Justifier qu'on peut restreindre l'inf dans (31) à un intervalle borné, et que cet inf est atteint.
2. Montrer que $\underline{u}(x) \leq u(x)$ pour tout x.
3. La fonction $\underline{u}$ est-elle bornée ?
4. On suppose u de classe C^1 avec u' bornée. Montrer que $|\underline{u}(x) - u(x)| \leq C\varepsilon$ pour une certaine constante C indépendante de x.

Exercice 4. Soit X, Y deux variables aléatoires sur $\{1, 2, 3\}$ de loi respectivement $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{4}$ et $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{1}{3}$. Quel est le minimum possible de $\mathbb{E}((X - Y)^2)$?

Exercice 3 Sur un cercle de centre O, on se donne trois arcs AB, CD et EF dont les angles au centre ont pour mesure $\pi/3$. On appelle M, N et P les milieux des cordes BC, DE et FA. Montrer que le triangle MNP est équilatéral.