Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Les questions sont indépendantes.

(1) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $L \in \mathbf{R}_+^\star$. On s'intéresse à la variable aléatoire discrète X qui vaut $k \in \mathbf{N}$ quand Y appartient à l'intervalle $[kL, (k+1)L[$.

(1a) Montrer que X est bien définie et déterminer sa loi.

(1b) Peut-on choisir L pour que X et Y aient la même espérance ?

(2) Trouver les $\lambda > 0$ pour lesquels il existe une variable aléatoire discrète X telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X = k + 1) = \lambda \mathbb{P}(X = k).$$

(3) *(3a)* Soit $k \in \mathbf{N}$. Pour quel $x \in [0, 1]$ la quantité $x(1-x)^k$ est-elle maximale ? Interpréter ce résultat en terme de variable aléatoire.

(3b) Écrire la somme permettant de calculer l'espérance d'une loi géométrique. Quel est le plus grand terme de cette somme ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Soit $h > 0$. On définit par récurrence, pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = x_n - hy_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hx_n.$$

(1) On introduit le nombre complexe $z_n = x_n + iy_n$. Exprimer z_n en fonction de n et z_0.

(2) Calculer la limite de $x_n^2 + y_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(3) Soit N un nombre entier. On définit h_N de telle sorte que $\arg(1 + ih_N) = \dfrac{2\pi}{N}$.

(3a) Montrer que $\sqrt{1 + h_N^2} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$.

(3b) En prenant $h = h_N$, on définit la suite (z_n) comme dans la première question (cette suite dépend donc de N). On note $w_N = z_N$ le N-ème terme de cette suite. Montrer que $w_N \to z_0$ lorsque N tend vers $+\infty$.